

FISICA

ElettroMagnetismo

IL CAMPO ELETTRICO

*Autore: prof. **Pappalardo Vincenzo***

*docente di **Matematica e Fisica***



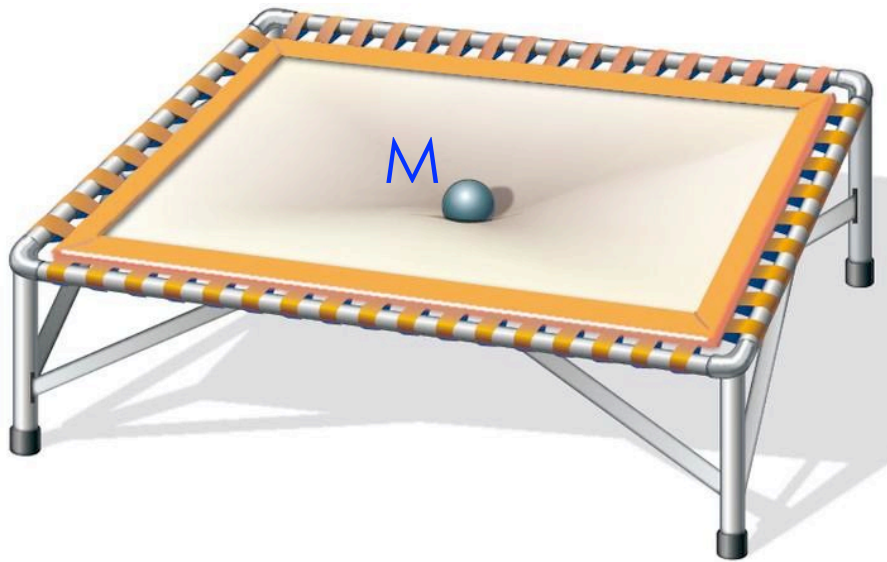
CONCETTO DI CAMPO ELETTRICO

La forza che si esercita tra due corpi carichi, così come quella gravitazionale, è una **forza a distanza**. Essa si fa sentire senza che vi sia alcuna connessione materiale tra i due corpi che interagiscono.

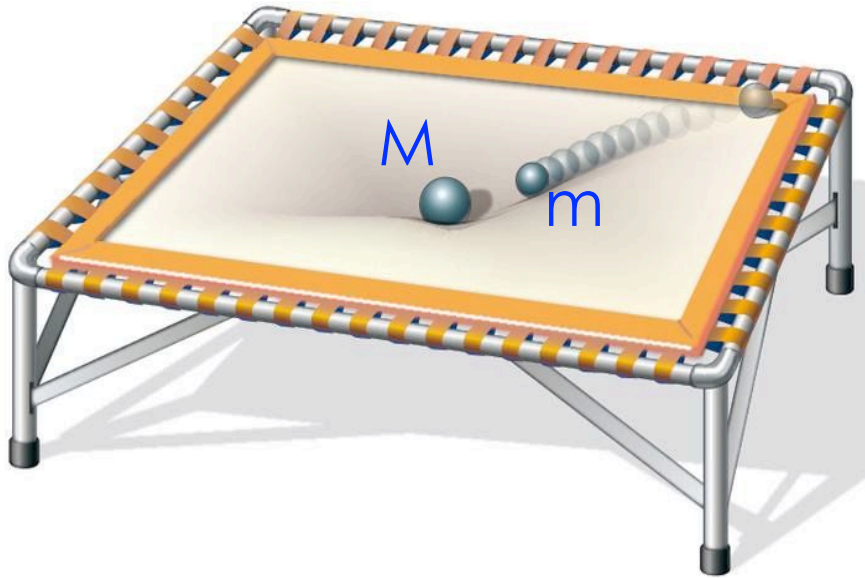
Cosa significa azione a distanza? Immaginiamo che i due corpi carichi siano uno sulla Terra e l'altro su un pianeta molto lontano. Se improvvisamente annulliamo la carica del corpo elettrizzato che si trova sulla Terra, la forza sull'altro corpo dovrebbe **istantaneamente annullarsi**. Ma non è pensabile che la forza si trasmetta a velocità infinita, ossia ad una velocità superiore a quella della luce (2° postulato relatività ristretta di Einstein).

Questa difficoltà può essere superata usando un altro tipo di descrizione, **la teoria dei campi** sviluppata da Faraday e Maxwell nel XIX secolo.

Facciamo un'analogia con il **campo gravitazionale**.



Supponiamo di avere un telo elastico ben teso: se appoggiamo nel centro una sfera pesante, questa provoca nel telo un avvallamento.



Se appoggiamo sul telo elastico una seconda sferetta, vediamo che essa segue la curvatura del telo, dirigendosi verso la sfera.

Una massa M , con la sua presenza, modifica in qualche modo lo spazio che la circonda. Lo spazio modificato è in grado di esercitare una forza su un altro corpo che si trova in un suo punto.

CAMPO GRAVITAZIONALE – E' quella regione di spazio, modificata dalla presenza di un corpo di massa M , in cui si sentono gli effetti della forza gravitazionale.

Quando un corpo A viene caricato con Q_1 , si genera in tutto lo spazio circostante una situazione nuova, diversa da quella che esisteva in precedenza quando A era scarico.

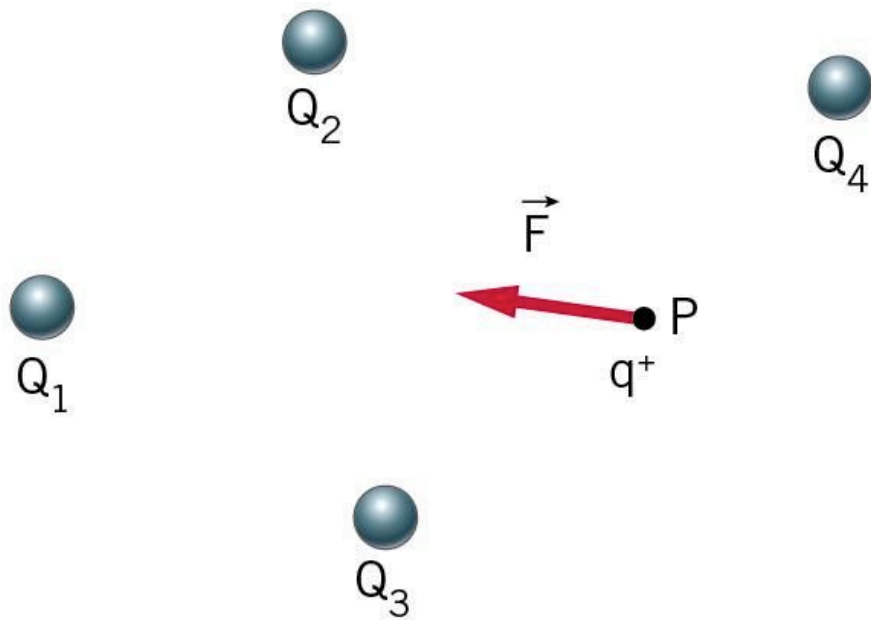
Il fatto di aver caricato A modifica le proprietà dello spazio che circonda questa carica, nel senso che ora lo spazio diventa sede di *forze elettriche*, mentre prima non lo era. Un altro corpo carico B con Q_2 , messo in qualche punto dello spazio, a un certo istante comincia a «sentire» una forza elettrica di cui Q_1 è la causa. L'effetto si propaga nello spazio alla velocità della luce.

Possiamo allora dare il seguente concetto:

CONCETTO DI CAMPO ELETTRICO

Per esprimere il fatto che un corpo carico B con carica Q_2 risente di una forza elettrica in tutti i punti dello spazio intorno al corpo carico A con carica Q_1 , si dice che la carica Q_1 di A «genera» nello spazio circostante un **campo elettrico**.

Cerchiamo, adesso, di definire operativamente il campo elettrico, e di rappresentarlo graficamente, visto che si tratta di un campo vettoriale.



Supponiamo che in una certa regione di spazio esistano una o più cariche che generano il campo elettrico.

Poniamo in un punto P un'altra carica q molto piccola (**carica di prova**), tale da non alterare con la sua presenza la distribuzione di cariche che producono il campo elettrico.

Vogliamo definire una grandezza che descriva l'interazione elettrica in ogni punto dello spazio, ma che non dipenda dalla particolare carica di prova utilizzata.

Questa nuova grandezza si chiama **vettore campo elettrico**, definito nel seguente modo:

DEFINIZIONE OPERATIVA DI CAMPO ELETTRICO

Si definisce campo elettrico nel punto P il vettore:

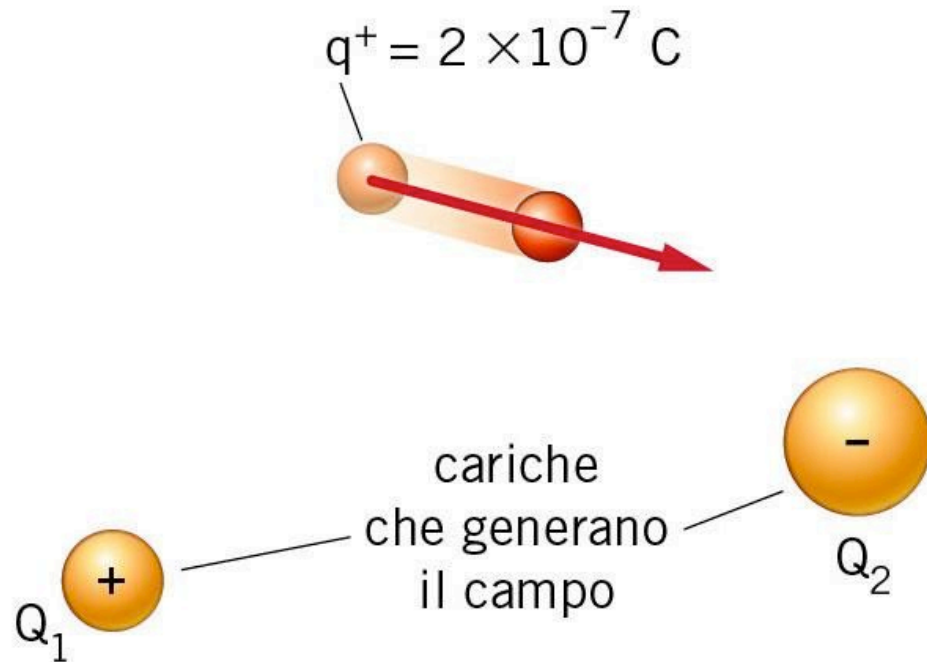
The diagram shows the equation $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q^+}$ centered within a yellow rectangular box. Three labels with leader lines point to parts of the equation: 'vettore campo elettrico (N/C)' points to $\vec{E}$, 'forza (N)' points to $\vec{F}$, and 'carica di prova positiva (C)' points to q^+ . To the right of the equation, the units $[N / C]$ are displayed.

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q^+}$$

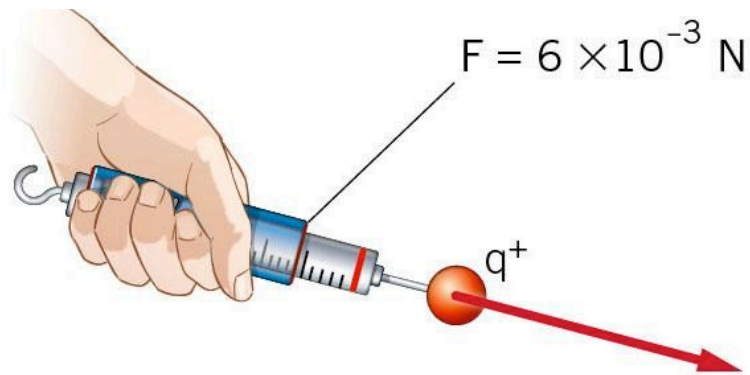
$[N / C]$

cioè il rapporto fra la forza **F** agente sulla carica q^+ e la carica q^+ stessa.

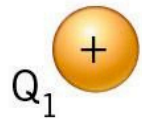
In pratica, per determinare il campo elettrico in un punto dello spazio, mettiamo la carica di prova q^+ in quel punto e procediamo come segue:



Osserviamo la direzione e il verso della forza che agisce su q^+ per effetto della presenza delle cariche Q_1 e Q_2 (regola del parallelogramma).



Misuriamo con un
dinamometro il valore
della forza.



Abbiamo tutti gli elementi
per determinare il vettore
campo elettrico:

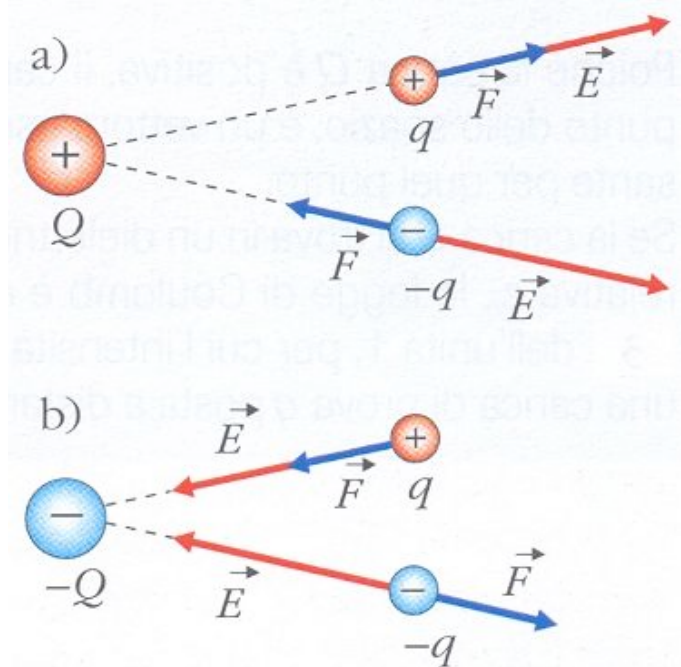
1. La direzione e il verso del campo elettrico sono gli stessi della forza **F** che agisce sulla carica di prova q^+ ;
2. Il modulo del vettore campo elettrico è:

$$E = \frac{F}{q^+} = \frac{6 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^{-7}} = 3 \cdot 10^4 \text{ N / C}$$

Se conosciamo il campo elettrico, possiamo calcolare la forza che agisce su qualsiasi carica. Infatti, dalla definizione di campo elettrico si ricava che:

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

forza (N) vettore campo elettrico (N/C) carica elettrica (C)



Se la carica di prova q è positiva, il campo elettrico $\mathbf{E}$ e la forza $\mathbf{F}$ hanno stessa direzione e verso.

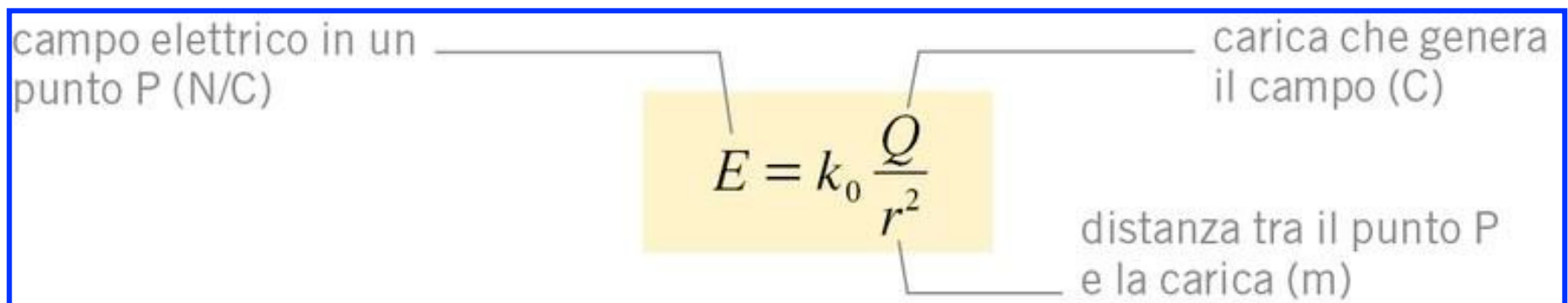
Se la carica di prova q è negativa, il campo elettrico $\mathbf{E}$ e la forza $\mathbf{F}$ hanno stessa direzione e verso opposti.

IL CAMPO ELETTRICO DI UNA CARICA PUNTIFORME

Il campo elettrico più semplice che possiamo immaginare è quello generato da una carica puntiforme Q . Tenendo conto della legge di Coulomb, si ha:

$$E = \frac{F}{q^+} = \frac{k_0 \frac{Qq^+}{r^2}}{q^+} = k_0 \frac{Q}{r^2}$$

Quindi, l'intensità del campo elettrico E di una carica puntiforme Q in un punto dello spazio P , a distanza r da essa, è:

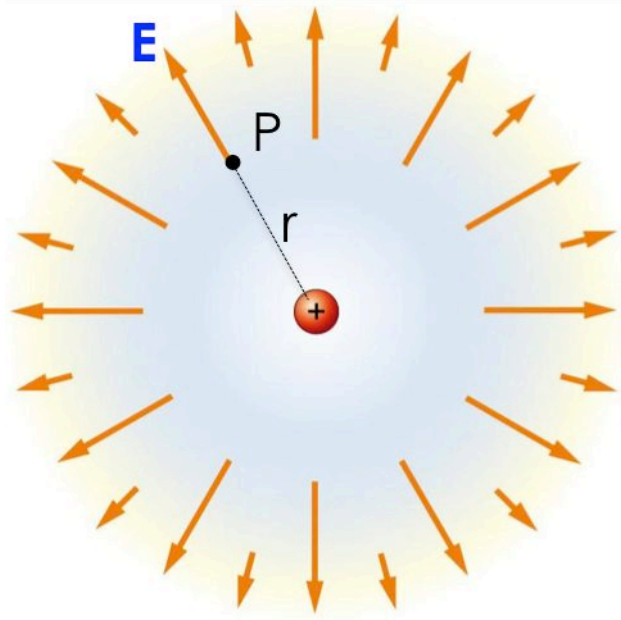


Qual è il vantaggio di usare il campo elettrico al posto della forza di Coulomb?

1. Supera il concetto di azione a distanza tra cariche elettriche;
2. Il valore del campo elettrico **E** in un punto dello spazio non dipende dalla carica di prova q^+ in quel punto. Ossia, possiamo associare a ogni punto dello spazio un determinato valore del campo elettrico indipendentemente dal fatto se in quel punto c'è una carica oppure no.

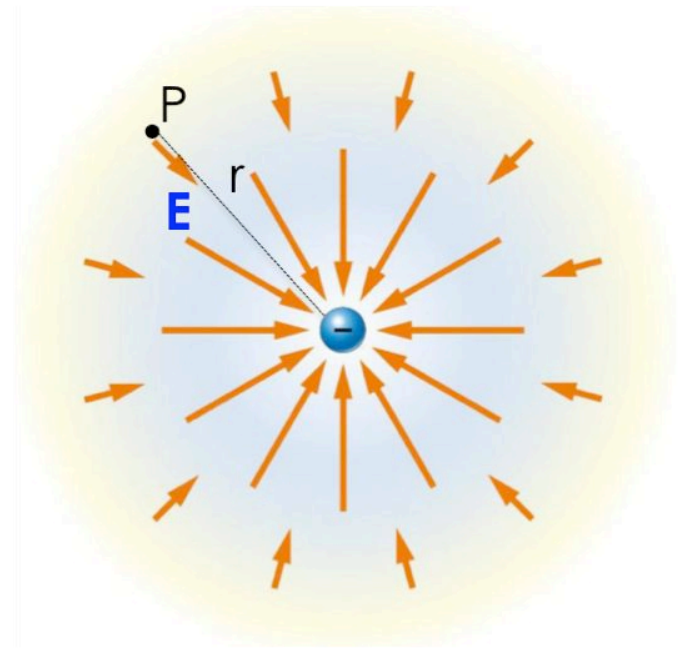
Il campo elettrico ha lo stesso comportamento della forza elettrica in relazione alla distanza r e al mezzo in cui la carica che genera il campo è posta.

Adesso, abbiamo tutti gli elementi per rappresentare il campo elettrico generato da una carica puntiforme.



Il campo elettrico generato da una carica puntiforme Q positiva in un punto P qualsiasi dello spazio è un vettore uscente dalla carica.

Il campo elettrico generato da una carica puntiforme Q negativa in un punto P qualsiasi dello spazio è un vettore entrante nella carica.

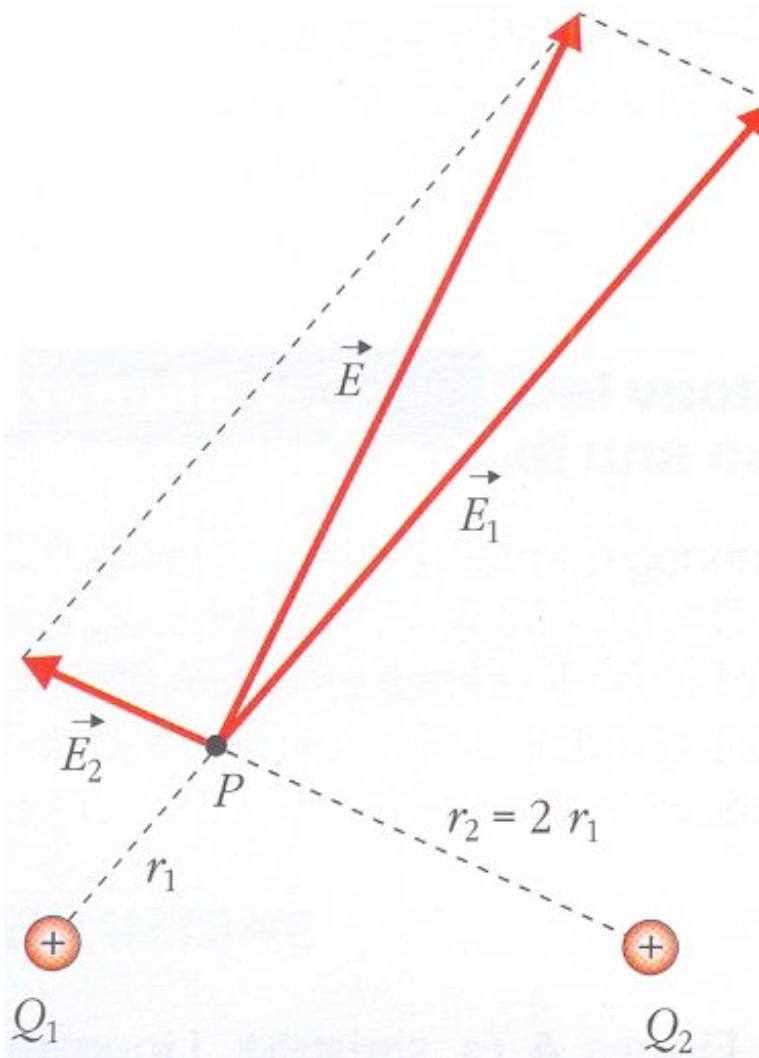


Se nello spazio agiscono varie cariche elettriche puntiformi, possiamo applicare lo stesso principio di sovrapposizione adottato per la forza di Coulomb:

PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE

Il campo elettrico in un punto P dello spazio è la somma vettoriale dei singoli campi elettrici prodotti dalle singole cariche in quel punto:

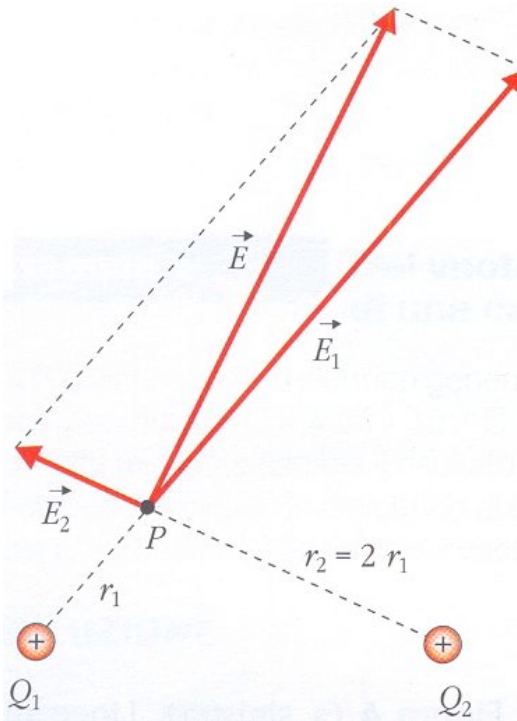
$$\vec{E} = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_n$$



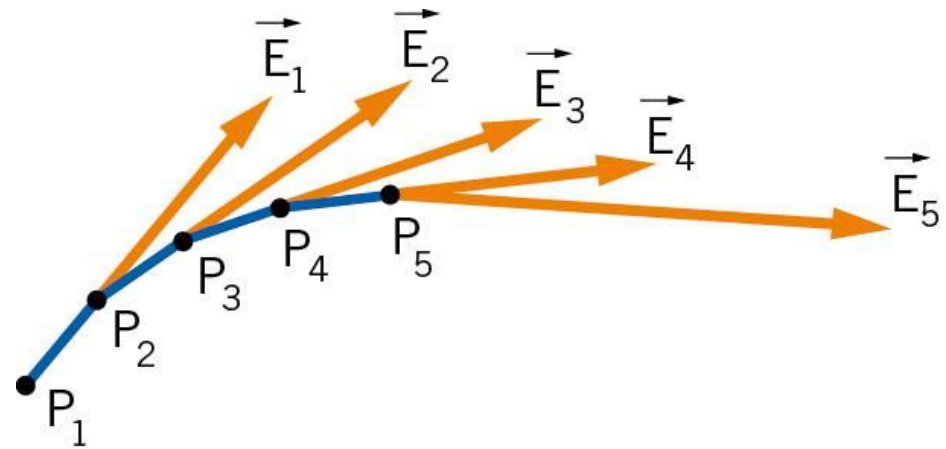
Il campo elettrico in P è la somma vettoriale (regola del parallelogramma) dei campi elettrici prodotti in P dalle cariche Q_1 e Q_2 .

La presenza di una carica non influisce sui campi elettrici generati dalle altre. Ossia, ogni carica produce in P un campo elettrico come se agisse da sola.

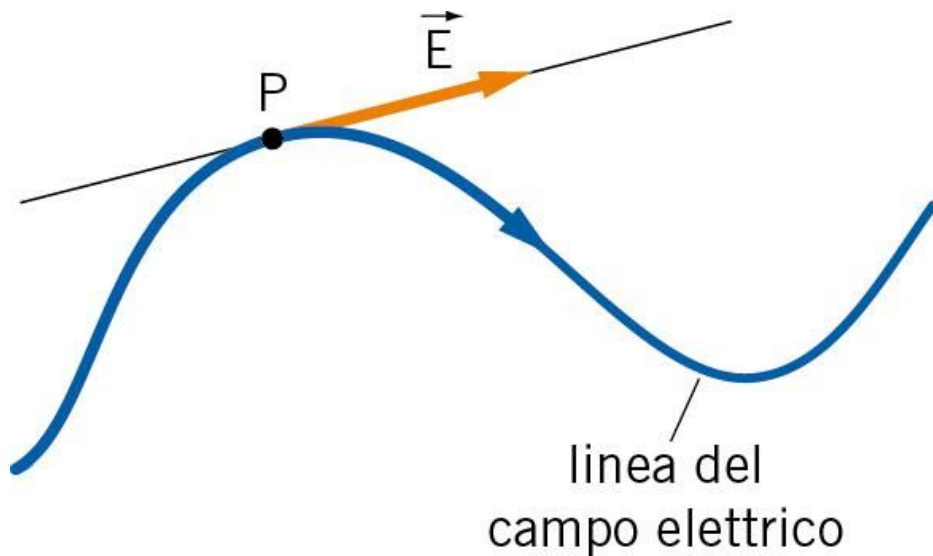
LE LINEE DEL CAMPO ELETTRICO



Abbiamo visto che il campo elettrico in P è la somma vettoriale dei campi elettrici prodotti in P dalle cariche Q_1 e Q_2 .



Se ripetiamo il procedimento per altri punti dello spazio, e uniamo i punti in cui si genera il campo elettrico risultante, si ottiene quella che si chiama **linea di campo elettrico** (linea blu).



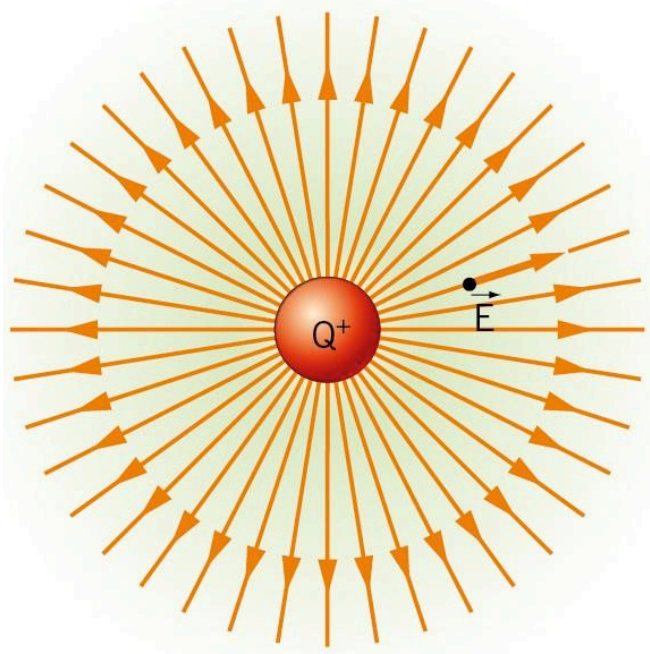
Il vettore campo elettrico $\vec{E}$ è sempre tangente alla linea di campo elettrico.

In definitiva:

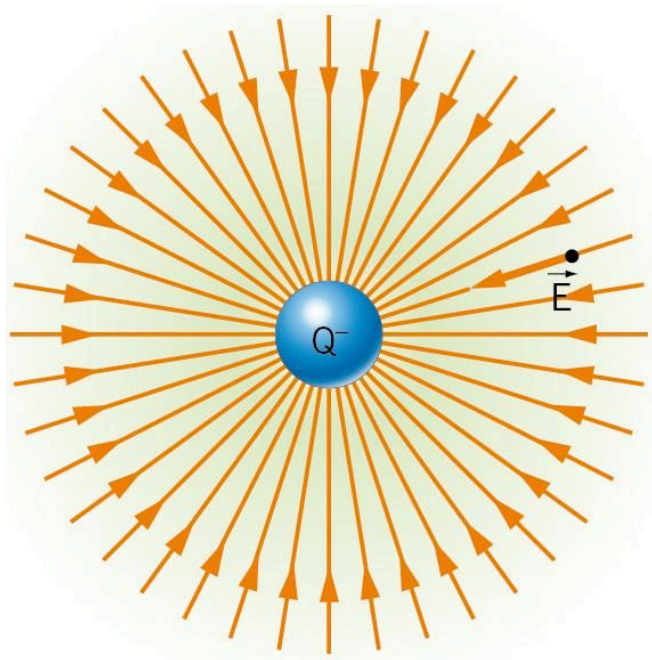
Il campo elettrico viene rappresentato mediante **le linee di forza**, definite come quelle **linee la cui tangente in ogni punto ha la stessa direzione del campo in quel punto.**

Queste **linee di campo** non hanno un'esistenza reale, nel senso che **non sono oggetti fisici reali**. Sono una **nostra costruzione che serve per visualizzare il campo elettrico**.

Visualizziamo il campo elettrico in alcune semplici situazioni.

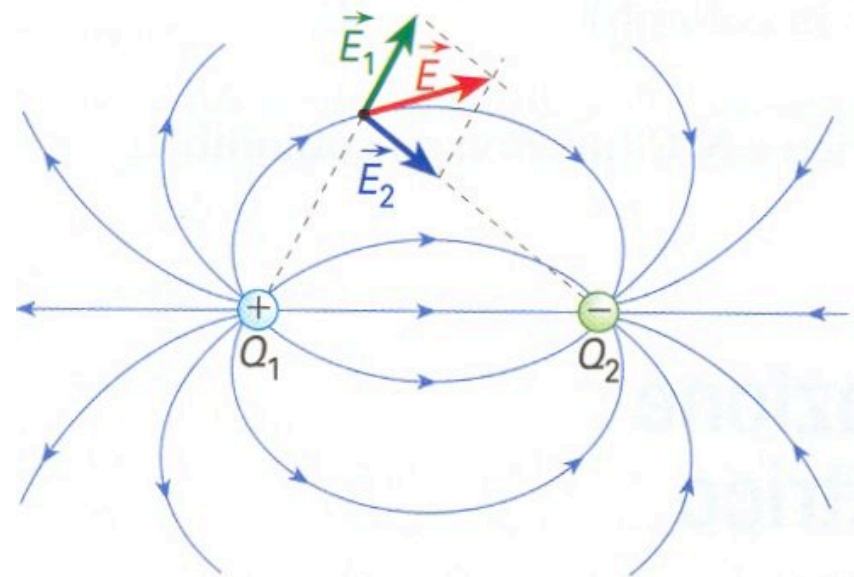


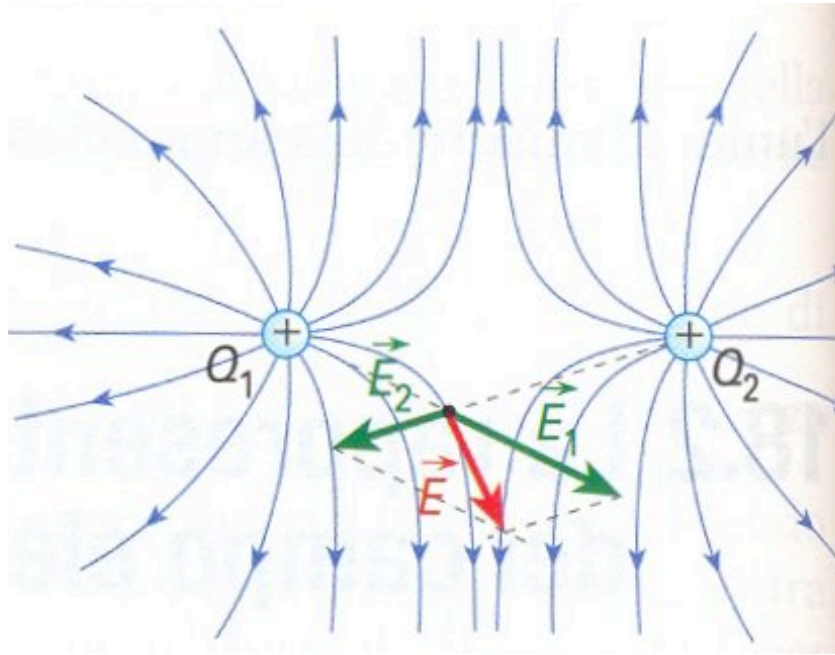
Le linee di campo elettrico generato da una carica puntiforme positiva sono rappresentate da semirette uscenti dalla carica. Il campo elettrico $\mathbf{E}$ è tangente alle semirette e punta verso l'esterno.



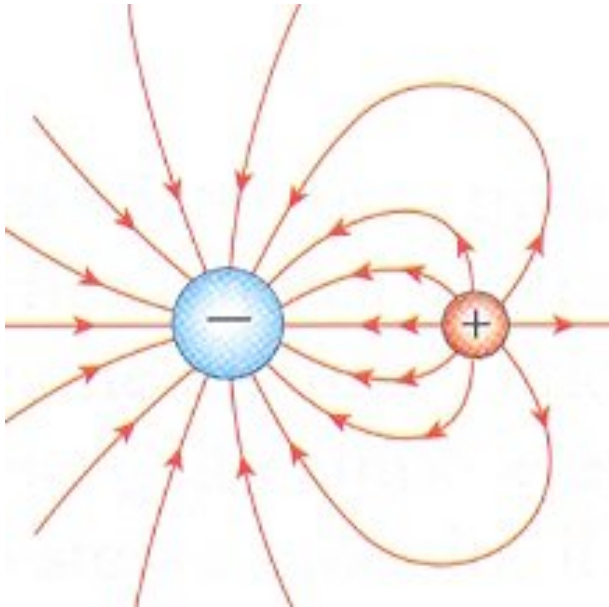
Le linee di campo elettrico generato da una carica puntiforme negativa sono rappresentate da semirette entranti nella carica. Il campo elettrico $\mathbf{E}$ è tangente alle semirette e punta verso l'interno.

Le linee di campo escono dalla carica positiva ed entrano in quella negativa: le due cariche si attraggono e il campo elettrico è tangente alle linee di campo.





Le linee di campo escono (o entrano) da entrambe le cariche positive (negative): dalla disposizione delle linee di campo si osserva che le due cariche si respingono. Il campo elettrico è sempre tangente alle linee di campo.



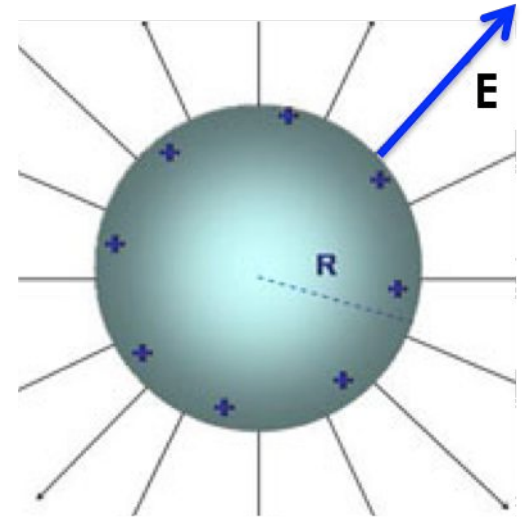
Situazione in cui le due cariche elettriche hanno valori differenti.

Osservando le linee dei campi elettrici esaminati, si possono ricavare alcune altre importanti informazioni:

- Le linee di campo sono dense vicino alle cariche e si diradano quando ci si allontana da esse. Questo significa che il campo è più intenso vicino alle cariche e più debole lontano, in accordo con il fatto che l'intensità del campo elettrico di una carica puntiforme diminuisce come l'inverso del quadrato della distanza.
- A ogni punto dello spazio è associato un solo vettore campo elettrico. Pertanto, le linee di forza non possono mai intersecarsi, perché in caso contrario nei punti di intersezione il campo elettrico dovrebbe avere due distinte direzioni, quelle delle rette tangenti alle linee che si intersecano.

IL TEOREMA DI GAUSS

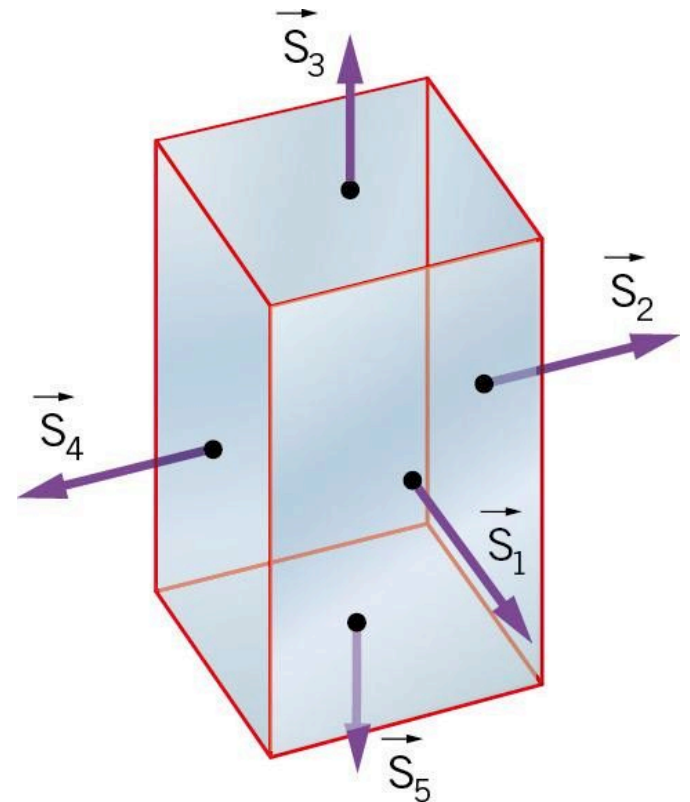
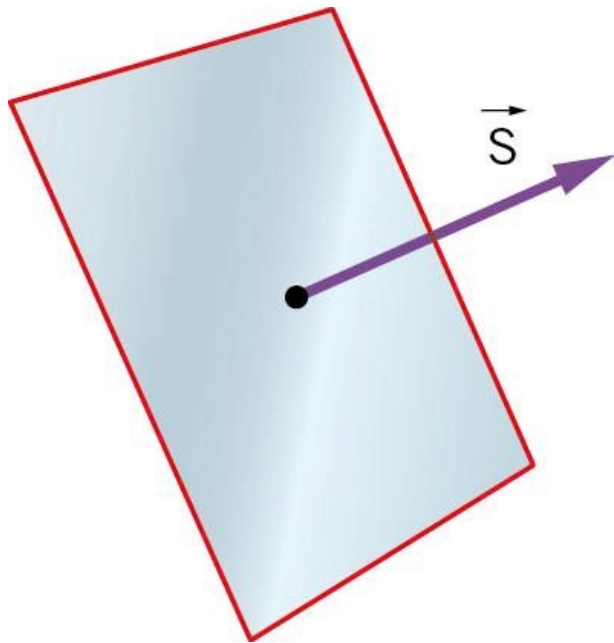
Il **teorema di Gauss** permette di determinare l'intensità del campo elettrico generato da distribuzioni di carica che abbiano particolari simmetrie, come la carica distribuita su una sfera.



Però, prima di enunciare il teorema, abbiamo bisogno di alcune definizioni.

VETTORE SUPERFICIE

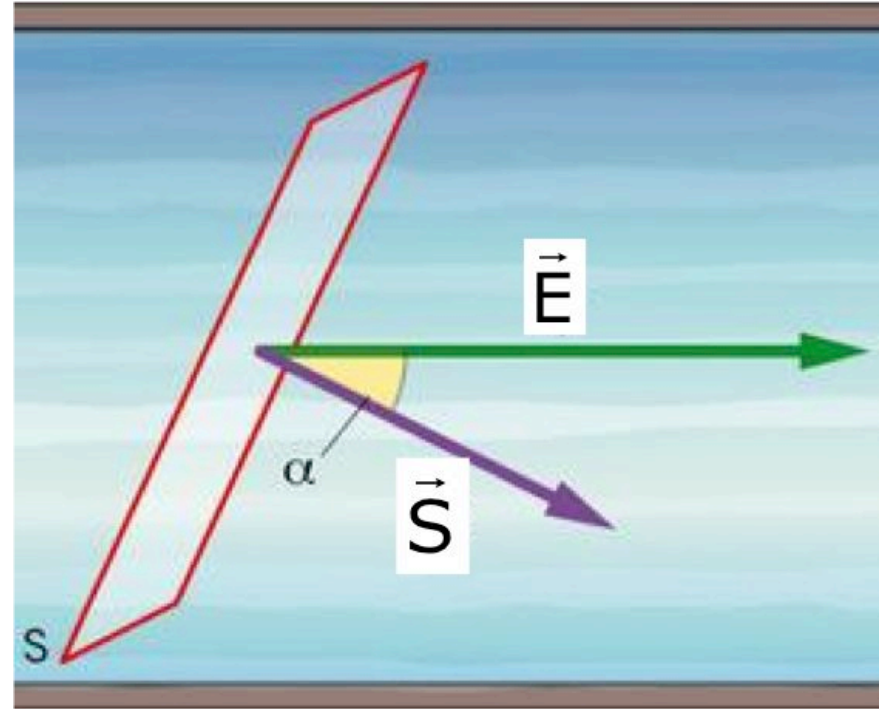
Si definisce vettore superficie **$\mathbf{S}$** quel vettore che ha direzione perpendicolare alla superficie e modulo pari all'area S della superficie stessa.



FLUSSO DEL CAMPO ELETTRICO

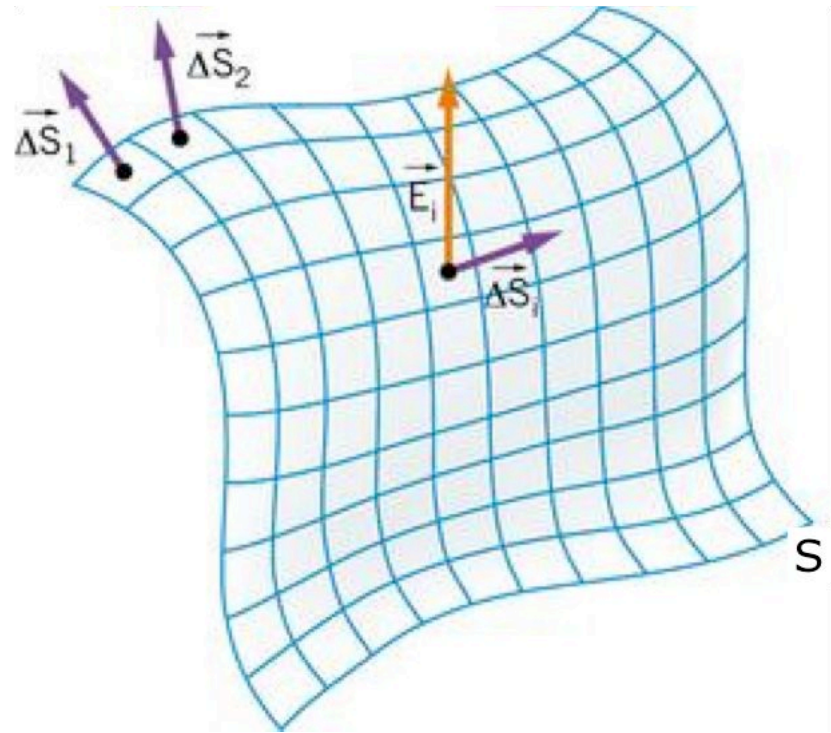
Se il campo elettrico $\vec{E}$ è uniforme su tutti i punti di una superficie piana orientata $\vec{S}$, il flusso del campo elettrico attraverso la superficie è il prodotto scalare tra il vettore campo elettrico $\vec{E}$ ed il vettore superficie $\vec{S}$:

$$\Phi_S(\vec{E}) = \vec{E} \cdot \vec{S} = E \cdot S \cdot \cos \alpha$$



Unità di misura
 Nm^2/C

Se si vuole calcolare il flusso del campo elettrico attraverso una superficie qualunque, bisogna suddividere S in n parti ΔS_i ($i = 1, \dots, n$) così piccole da soddisfare le condizioni della definizione (superficie piana e campo elettrico costante su di essa).

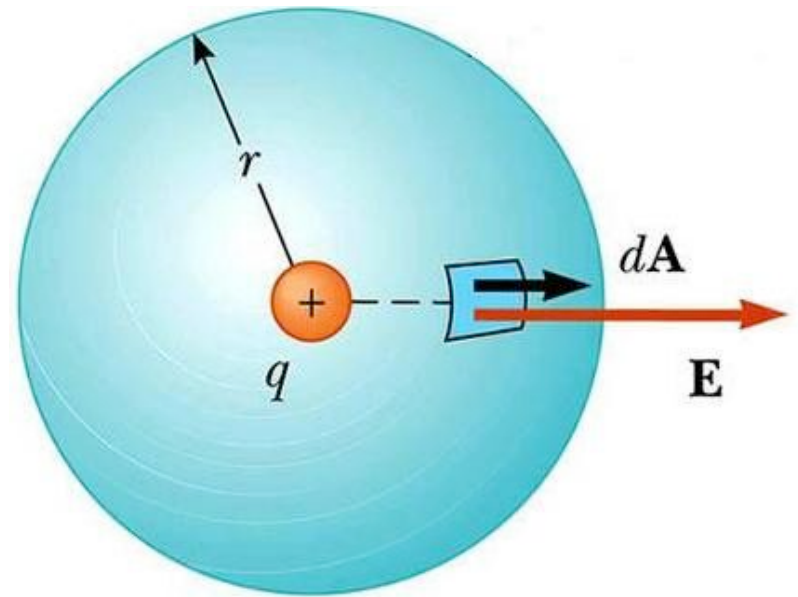


Il flusso del campo elettrico $\mathbf{E}$ attraverso la superficie S è la somma dei flussi attraverso le n superfici ΔS_i :

$$\Phi_S(\vec{E}) = \sum_{i=1}^n \Delta\Phi_i(\vec{E}) = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i \cdot \vec{\Delta S}_i = \sum_{i=1}^n E_i \Delta S_i \cos \alpha_i$$

TEOREMA DI GAUSS

Il flusso del campo elettrico uscente da una *qualsiasi superficie chiusa* è direttamente proporzionale alla carica totale contenuta all'interno della superficie:



flusso del campo
elettrico ($\text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}$)

superficie chiusa

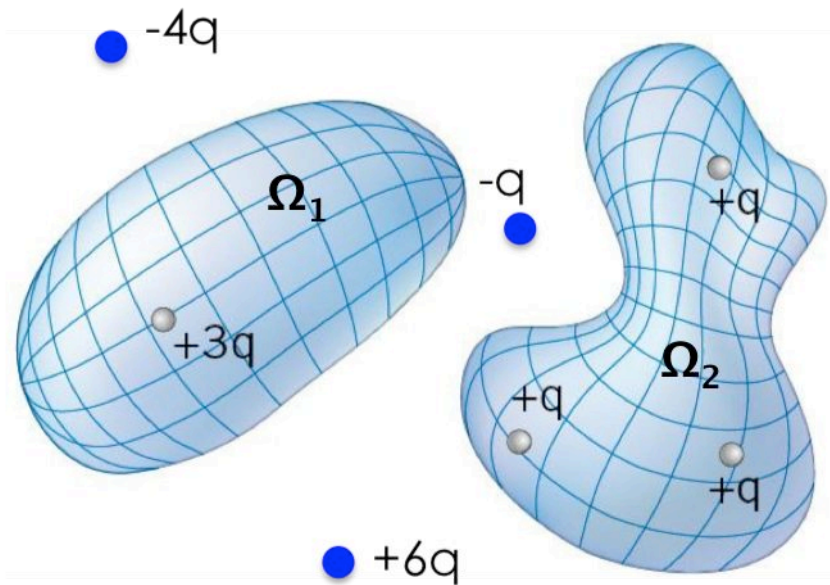
$$\Phi_{\Omega}(\vec{E}) = \frac{Q_{tot}}{\epsilon}$$

carica totale all'interno
della superficie (C)

costante dielettrica
del mezzo ($\text{C}^2/(\text{N}\cdot\text{m}^2)$)

Il valore del flusso non dipende:

- dalla forma della superficie Ω (purchè chiusa):
- da come è distribuita la carica (purchè interna);
- dalle eventuali cariche esterne

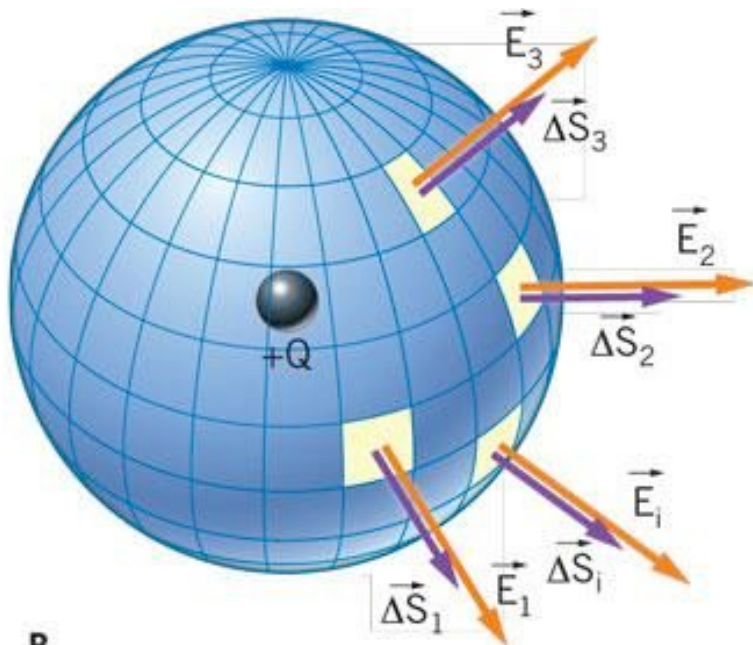
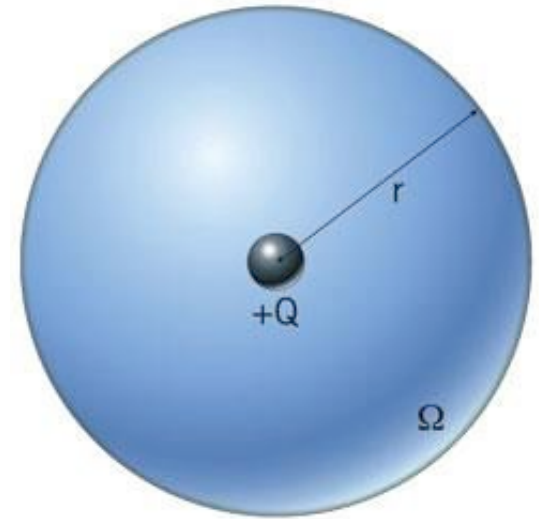


Per il teorema di Gauss, il flusso del campo elettrico attraverso le due superfici ha lo stesso valore:

$$\Phi_{\Omega_1}(\vec{E}) = \Phi_{\Omega_2}(\vec{E}) = \frac{\sum q_{\text{int}}}{\epsilon} = \frac{3q}{\epsilon}$$

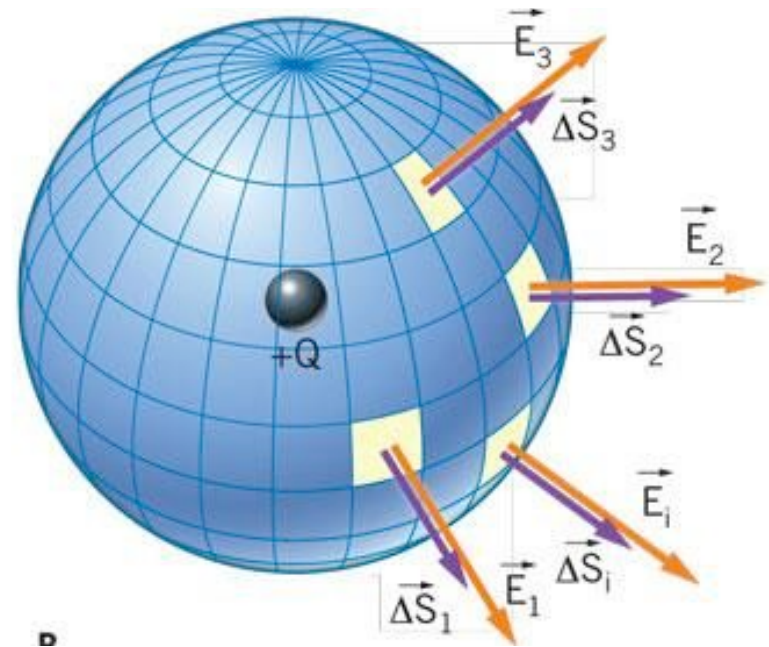
DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA DI GAUSS

Illustriamo il teorema in un caso particolare, quello del campo elettrico generato da una carica puntiforme Q e di una superficie sferica di raggio r avente il centro coincidente con la posizione della carica.



Suddividiamo la sfera in n parti così piccole da poterle considerare piane, in modo tale da poter applicare la definizione di flusso.

Su tutti i punti della superficie il modulo E del campo elettrico è costante (i punti della sfera sono equidistanti dal centro in cui è posta la carica) e considerato un elemento ΔS_1 della superficie sferica, il vettore $\mathbf{E}$ è diretto secondo la perpendicolare a tale elemento ($\vartheta=0^\circ$ e quindi $\cos\vartheta=1$).



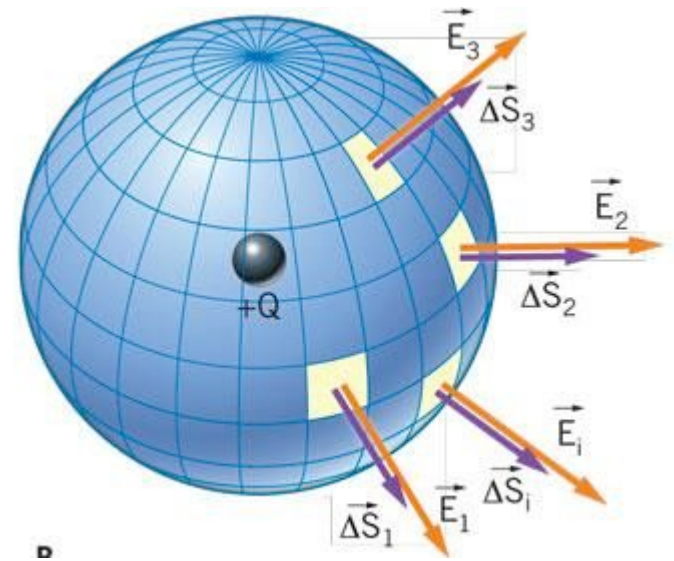
Pertanto, il flusso parziale attraverso la superficie ΔS_1 è:

$$\Delta\Phi_1(\vec{E}) = E\Delta S_1$$

Ripetendo lo stesso ragionamento per tutti gli altri elementi di superficie, si ottiene che il flusso totale è:

$$\Phi_{\Omega}(\vec{E}) = E\Delta S_1 + E\Delta S_2 + \dots + E_n\Delta S_n =$$

$$E(\Delta S_1 + \Delta S_2 + \dots + \Delta S_n) \xrightarrow{\sum_{i=1}^n \Delta S_i = S_{\Omega}} \Phi_{\Omega}(\vec{E}) = ES_{\Omega}$$



Tenendo conto delle seguenti espressioni:

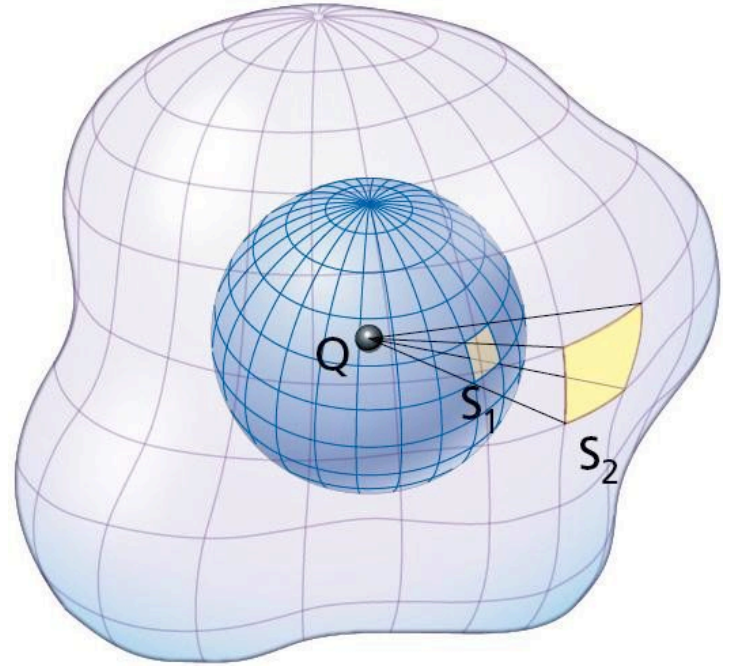
$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q}{r^2} \quad S_{\Omega} = 4\pi r^2$$

si ottiene:

$$\Phi_{\Omega}(\vec{E}) = ES_{\Omega} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q}{r^2} \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon} \quad \text{cvd}$$

Naturalmente, il teorema di Gauss ha validità generale, per cui si applica a qualsiasi superficie chiusa all'interno della quale ci sono le cariche.

Infatti, deformando la sfera in una superficie chiusa qualsiasi, il numero di linee di campo elettrico che attraversano $\mathbf{S}_1$ (nella sfera) e $\mathbf{S}_2$ (nella superficie distorta) è lo stesso.



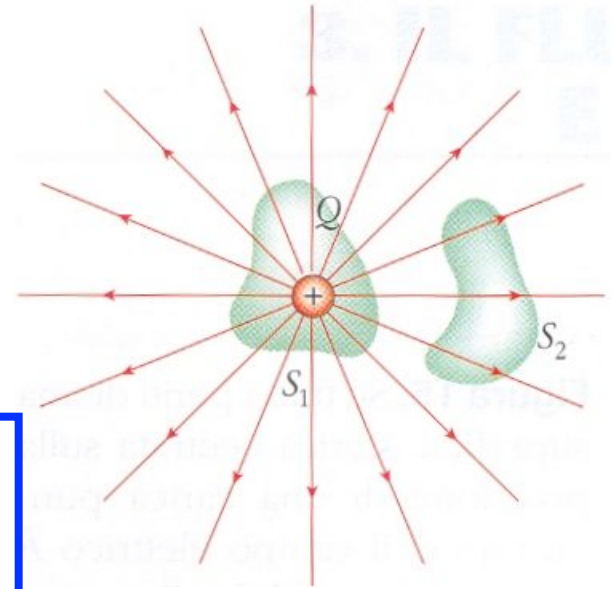
Tale dimostrazione è resa più rigorosa con gli strumenti dell'analisi infinitesimale (integrali).

Dimostriamo anche perché solo le cariche interne alla superficie chiusa, e non quelle esterne, contribuiscono al flusso del campo elettrico.

Le linee di forza che attraversano la superficie chiusa S_1 sono tutte uscenti, perché la carica è interna.

Per il teorema di Gauss, il flusso del campo elettrico è:

$$\Phi_{S_1} = \frac{Q}{\epsilon}$$



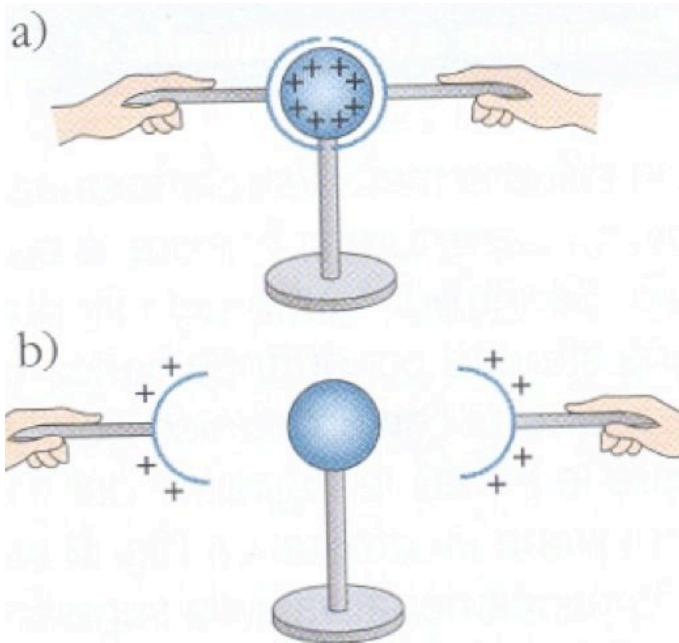
Per la superficie chiusa S_2 , la carica è esterna, quindi le linee di forza che attraversano S_2 sono in ugual misura entranti e uscenti. Ne segue che il flusso netto del campo elettrico uscente da S_2 è zero:

$$\Phi_{S_2} = 0$$

APPLICAZIONI TEOREMA DI GAUSS

Il teorema di Gauss è utile per il calcolo del campo elettrico generato da alcune particolari distribuzioni della carica elettrica.

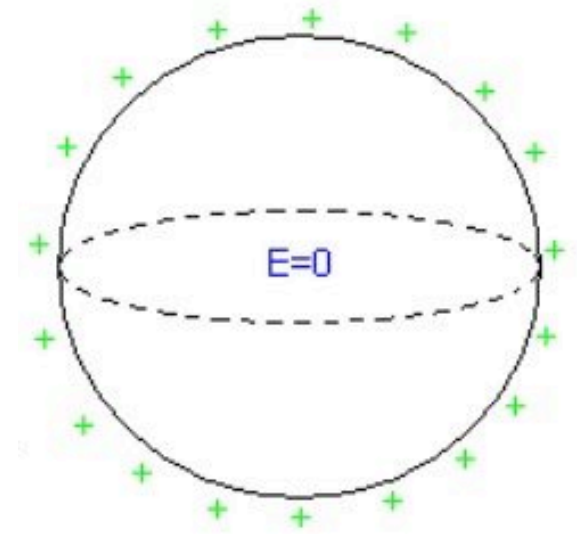
Distribuzione della carica elettrica sulla superficie di un conduttore in equilibrio elettrostatico



L'esperienza dimostra che la carica elettrica in un conduttore carico in equilibrio elettrostatico (cariche ferme alla fine della carica) si distribuisce sulla superficie esterna del conduttore.

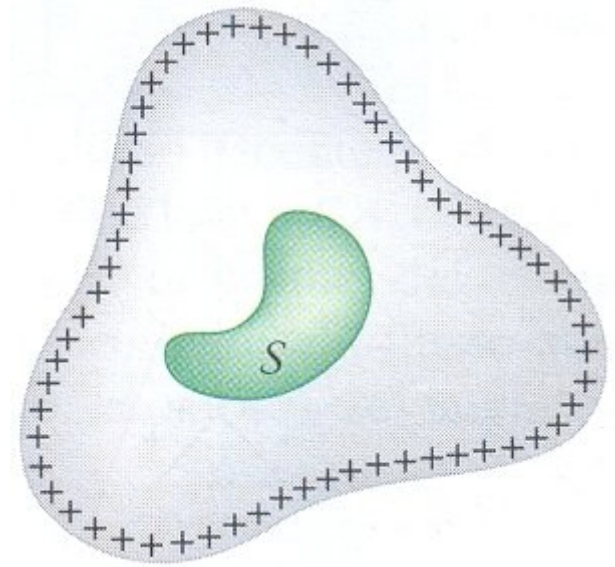
Il fatto che la carica elettrica si distribuisca sulla superficie esterna di un conduttore **è una conseguenza del teorema di Gauss.**

Per dimostrarlo iniziamo con il mettere in evidenza la seguente proprietà: ***all'interno di un conduttore in equilibrio elettrostatico il campo elettrico è nullo.***



Infatti, in caso contrario gli elettroni di conduzione, sotto l'azione del campo elettrico, sarebbero soggetti a una forza che li metterebbe in movimento. Così l'ipotesi che il conduttore sia in equilibrio elettrostatico verrebbe contraddetta.

Se in ogni punto entro il volume del conduttore il campo elettrico è nullo, è nullo anche il flusso Φ del campo uscente da una qualsiasi superficie chiusa S completamente contenuta all'interno del conduttore.



Allora, per il teorema di Gauss, la somma $\sum Q_i$ delle cariche racchiuse entro la superficie è uguale a zero.

Poiché la superficie prescelta è arbitraria, possiamo concludere che l'intero conduttore, al suo interno, è privo di carica in eccesso.

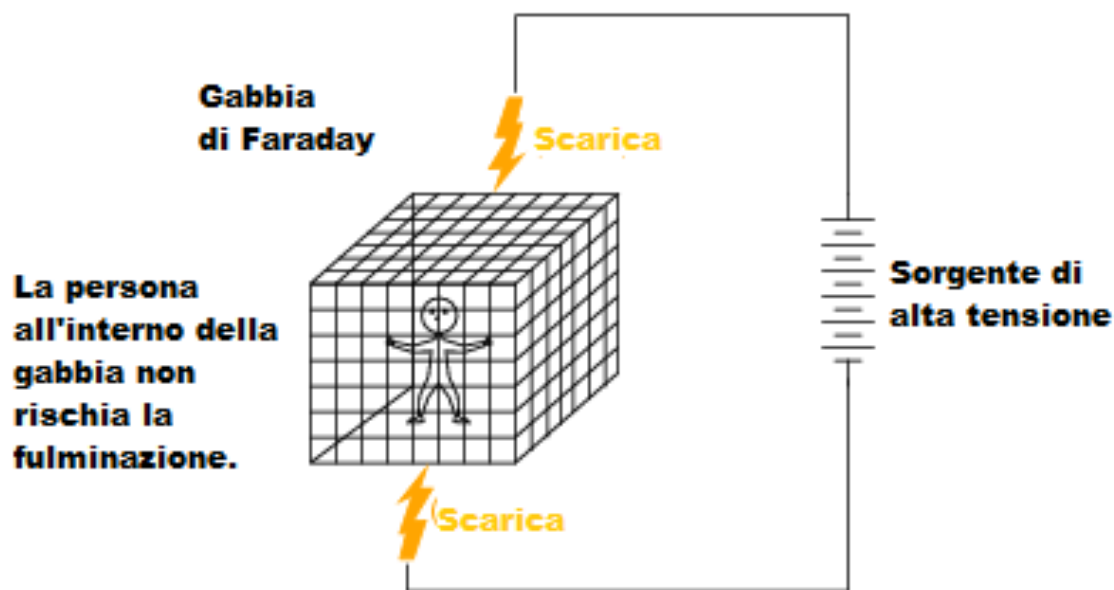
Se il conduttore è elettricamente carico, la carica può essere distribuita solo sulla superficie da cui è delimitato.

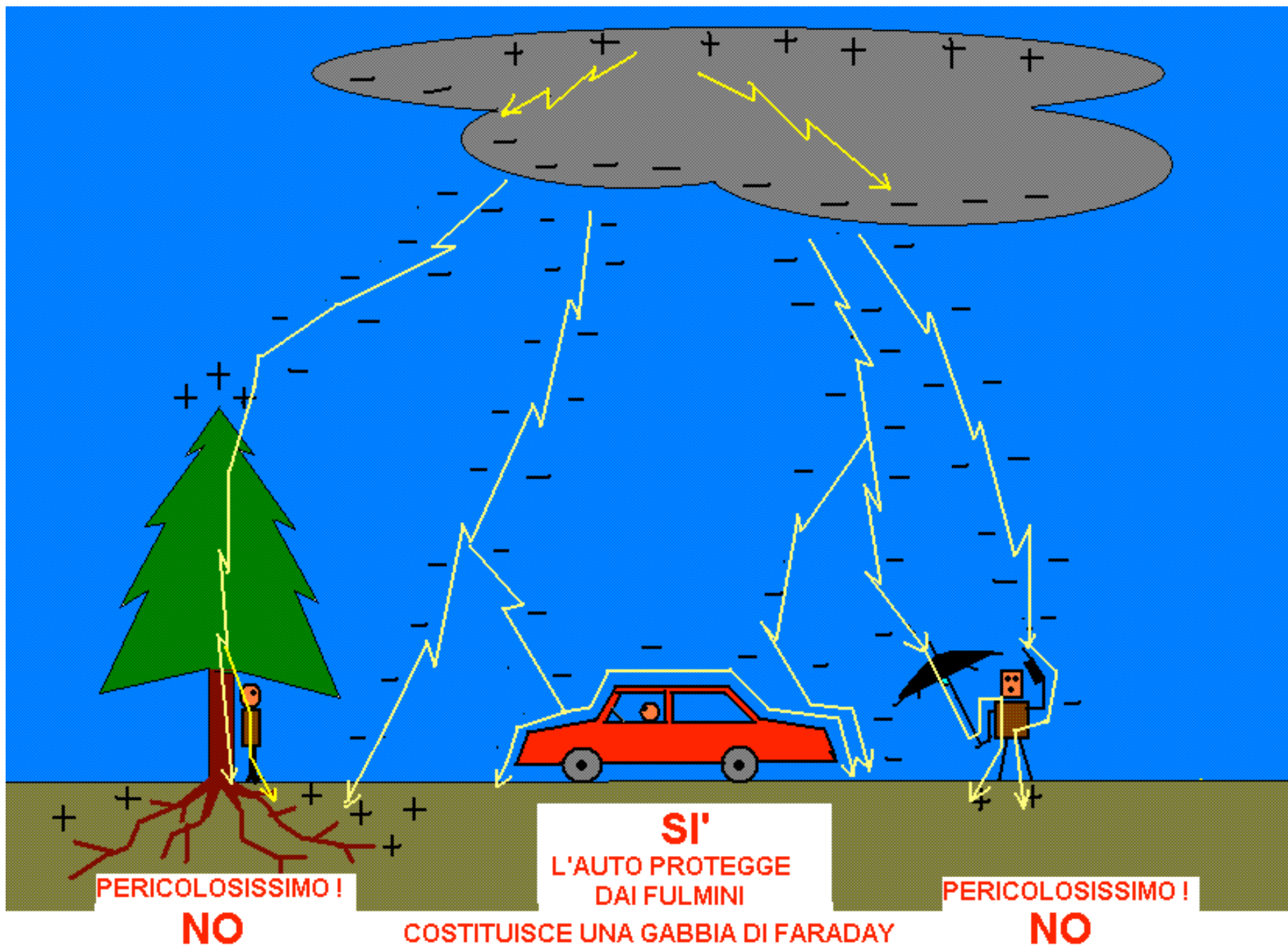
La gabbia di Faraday

esempio

Una gabbia di Faraday è un conduttore cavo, non necessariamente continuo, che viene usato per preservare dai campi elettrici esterni ciò che è al suo interno.

Se all'interno di una gabbia di Faraday si mette un corpo carico, all'esterno non si risentirà alcun effetto. Un tale conduttore cavo è quindi un quasi perfetto schermo elettrostatico. Inoltre, se una carica elettrica viene a contatto con la parete interna della gabbia, essa si propaga istantaneamente alla parete esterna, lasciando la parete interna completamente scarica.



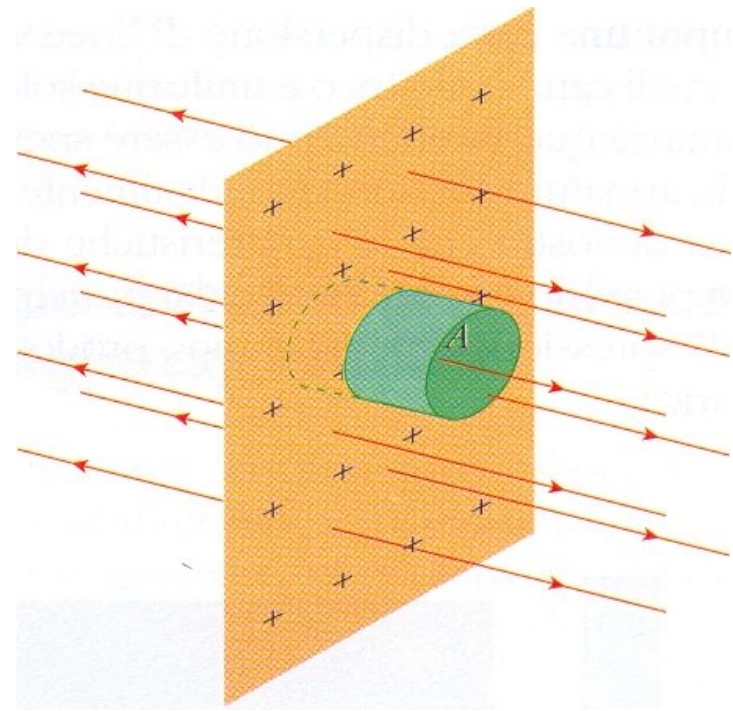


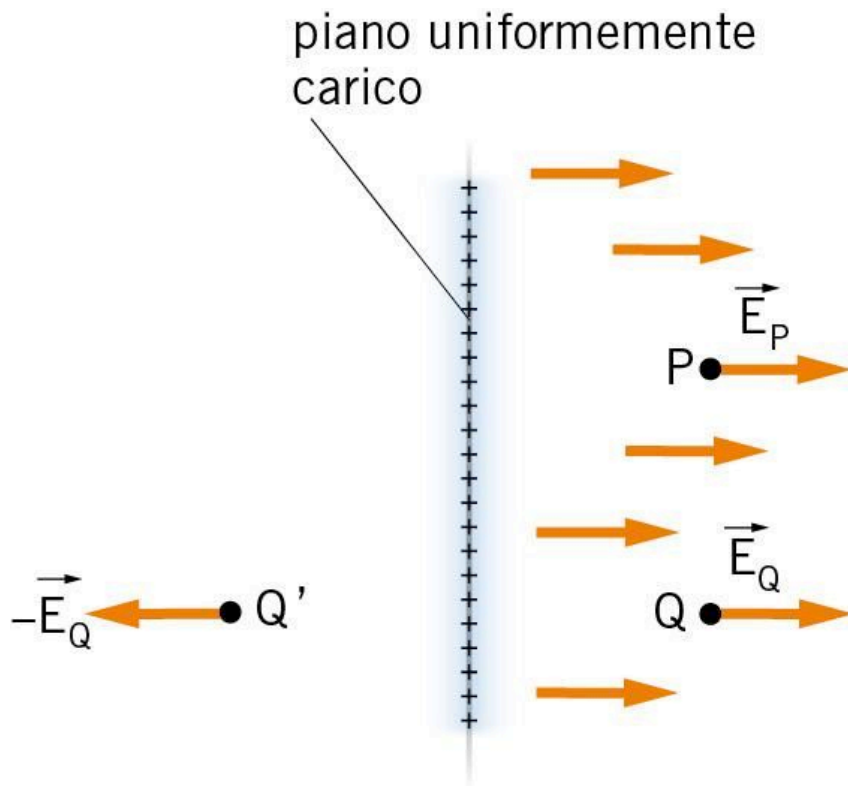
Campo elettrico generato da distribuzione piana di cariche

Consideriamo una superficie piana *infinita* con una densità superficiale di carica:

$$\sigma = \frac{Q}{\Delta S} = \left[\frac{C}{m^2} \right]$$

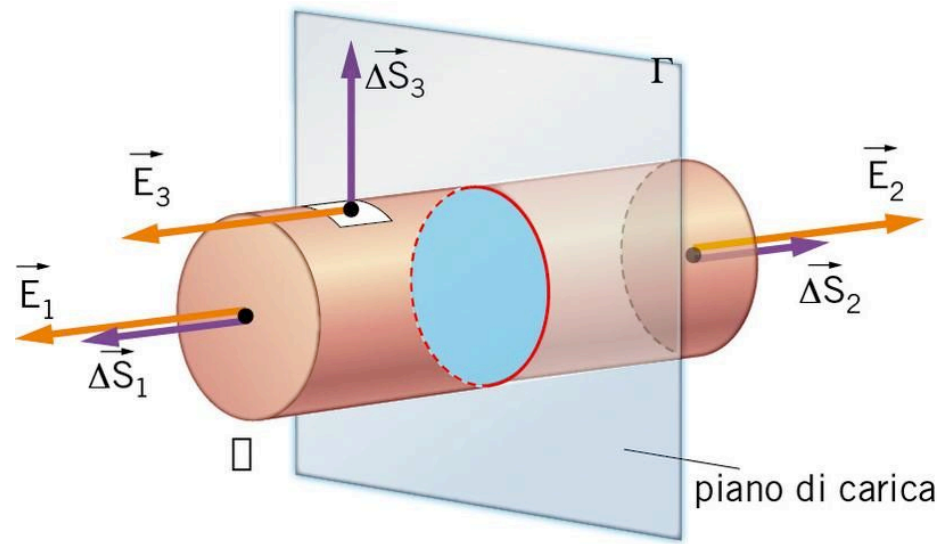
Utilizzando le simmetrie del sistema, e tenendo presente che la carica elettrica è disposta in maniera uniforme (ogni parte di area del piano contiene la stessa quantità di carica), si dimostrano le seguenti proprietà:





- Il campo elettrico ha direzione perpendicolare al piano di carica;
- Il verso è uscente (piano carico positivamente); entrante (piano carico negativamente);
- Il modulo di $\mathbf{E}$ è uguale in tutti i punti che non appartengono al piano di carica.

Calcoliamo l'intensità del campo elettrico utilizzando il teorema di Gauss e le proprietà di simmetria.



Per il calcolo del campo elettrico consideriamo una superficie cilindrica chiusa, con le basi, ciascuna di area $\Delta S_1 = \Delta S_2$, disposte ai due lati del piano carico e parallele a esso.

Il flusso del campo elettrico uscente dalle basi, tenendo presente che i vettori $\mathbf{E}$ e $\Delta \mathbf{S}$ hanno lo stesso verso ($\cos 0^\circ = 1$), vale:

$$\Phi(\vec{E}) = E_1 \Delta S_1 + E_2 \Delta S_2 \xrightarrow{E_1 = E_2, \Delta S_1 = \Delta S_2} \Phi(\vec{E}) = 2E\Delta S$$

Il flusso attraverso la superficie laterale è nullo, in quanto i vettori $\mathbf{E}$ e $\Delta \mathbf{S}$ sono a 90° ($\cos 90^\circ = 0$).

Indicando con Q la carica della lastra contenuta entro la superficie cilindrica, per il teorema di Gauss si ha:

$$\Phi(\vec{E}) = 2E\Delta S = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{Q}{2\epsilon\Delta S}$$

In definitiva, introducendo la densità superficiale si ottiene:

Campo elettrico generato da distribuzioni piane di cariche

The diagram shows the formula $E = \frac{\sigma}{2\epsilon}$ centered within a yellow rectangular box. Four lines extend from the box to labels: one from the top-left points to the text "campo elettrico (N/C)", one from the top-right points to "densità superficiale di carica (C/m²)", one from the bottom-right points to "costante dielettrica del mezzo (C²/(N·m²))", and one from the bottom-left points to the denominator "2ε".

campo elettrico (N/C)

$E = \frac{\sigma}{2\epsilon}$

densità superficiale di carica (C/m²)

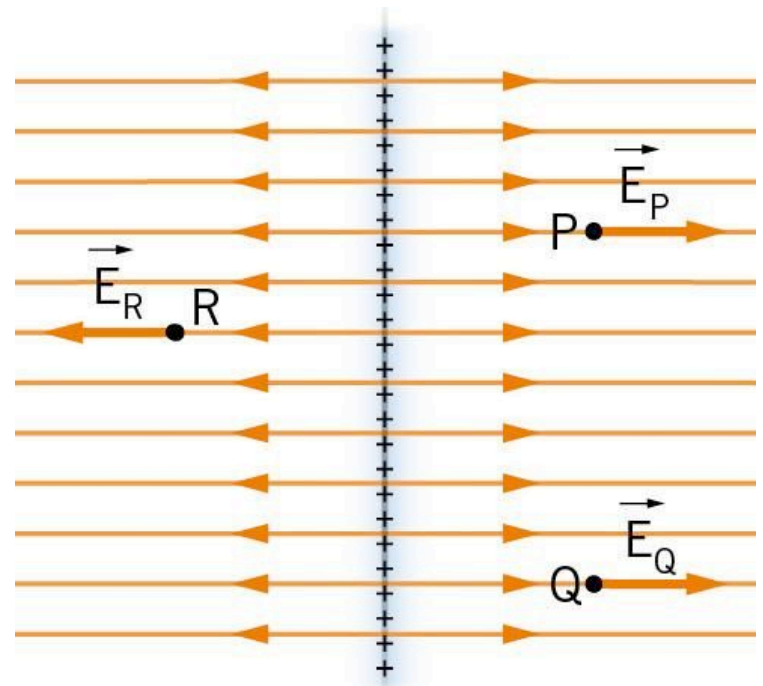
costante dielettrica del mezzo (C²/(N·m²))

Notiamo che nella formula non compare la distanza tra il piano di carica e il punto P in cui si calcola il campo elettrico.

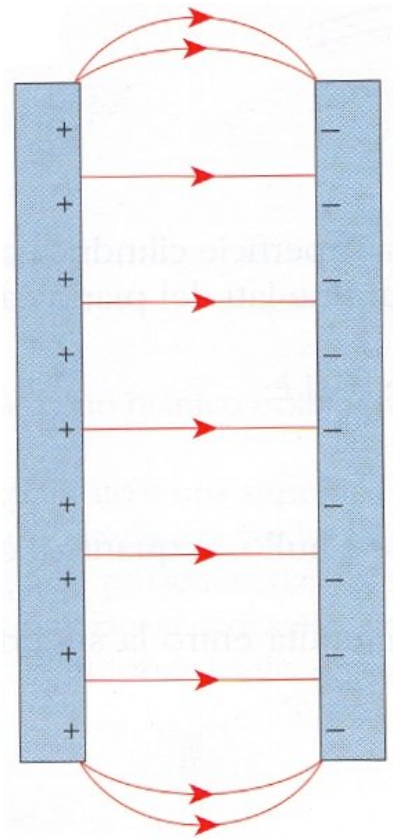
In sostanza, il modulo di $\mathbf{E}$ è uniforme, cioè rimane costante al variare del punto P.

Questa proprietà è confermata dalla forma delle linee di campo:

Le linee di campo elettrico
sono parallele ed
equidistanziate.



Due piastre metalliche piane poste una di fronte all'altra a distanza piccola rispetto alle loro dimensioni, elettrizzate con cariche opposte Q e $-Q$, costituiscono un **condensatore piano**.



Le linee di forza del campo elettrico all'interno di un condensatore piano sono perpendicolari alle armature, equidistanti e orientate dall'armatura positiva a quella negativa, salvo ai bordi.

In un condensatore piano ideale, infinitamente esteso, le due armature possiedono densità superficiali di carica rispettivamente uguali a σ e a $-\sigma$. Determiniamo il campo elettrico all'interno e all'esterno del condensatore.

DISCUSSIONE

Per il principio di sovrapposizione, il campo elettrico $\vec{E}$ in ogni punto dello spazio è uguale alla somma vettoriale dei campi elettrici $\vec{E}_1$ ed $\vec{E}_2$ generati in quello stesso punto, separatamente, dalle due armature cariche.

L'armatura a sinistra (fig. 25), che possiede una densità superficiale di carica positiva σ , produce un campo $\vec{E}_1$ diretto perpendicolarmente alla sua superficie in verso *uscente*, di

modulo $E_1 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$; l'armatura a destra, con densità superficiale di carica $-\sigma$, produce invece un campo $\vec{E}_2$ in verso *entrante*, avente modulo $E_2 = E_1$.

All'esterno del condensatore i due campi elettrici si annullano, per cui il campo risultante ha modulo:

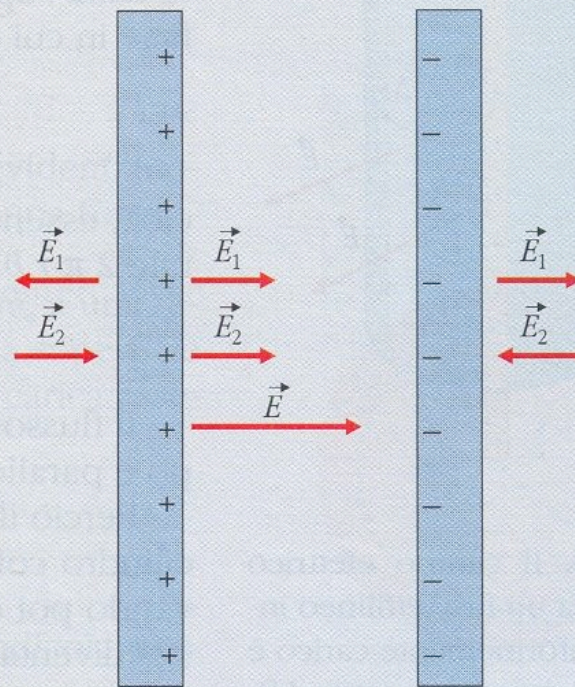
$$E = 0$$

Figura 25. Il campo elettrico $\vec{E}$ prodotto da un condensatore, per il principio di sovrapposizione, è uguale alla somma vettoriale dei campi $\vec{E}_1$ ed $\vec{E}_2$ generati dalle due piastre cariche che lo costituiscono, aventi rispettivamente densità superficiali di carica σ e $-\sigma$.

Nello spazio compreso fra le due piastre, invece, i due campi hanno verso concorde e quindi i loro moduli, entrambi uguali a $\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$, si sommano.

In conclusione, dentro al condensatore il campo è *uniforme*, diretto perpendicolarmente dall'armatura positiva a quella negativa, con modulo:

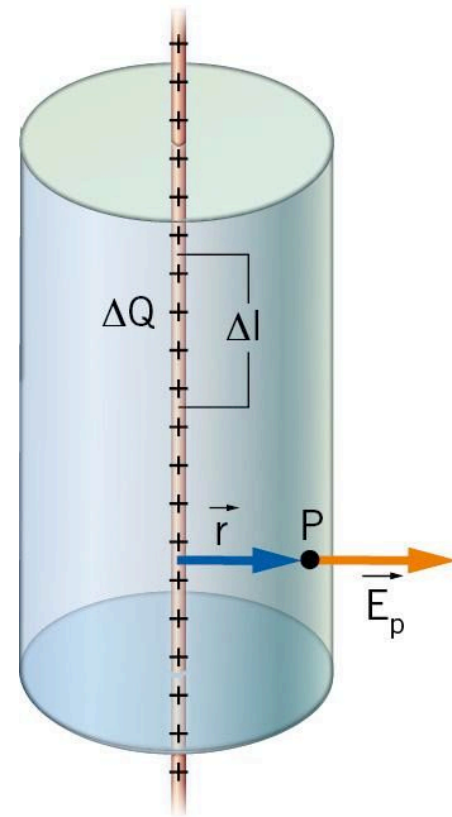
$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$



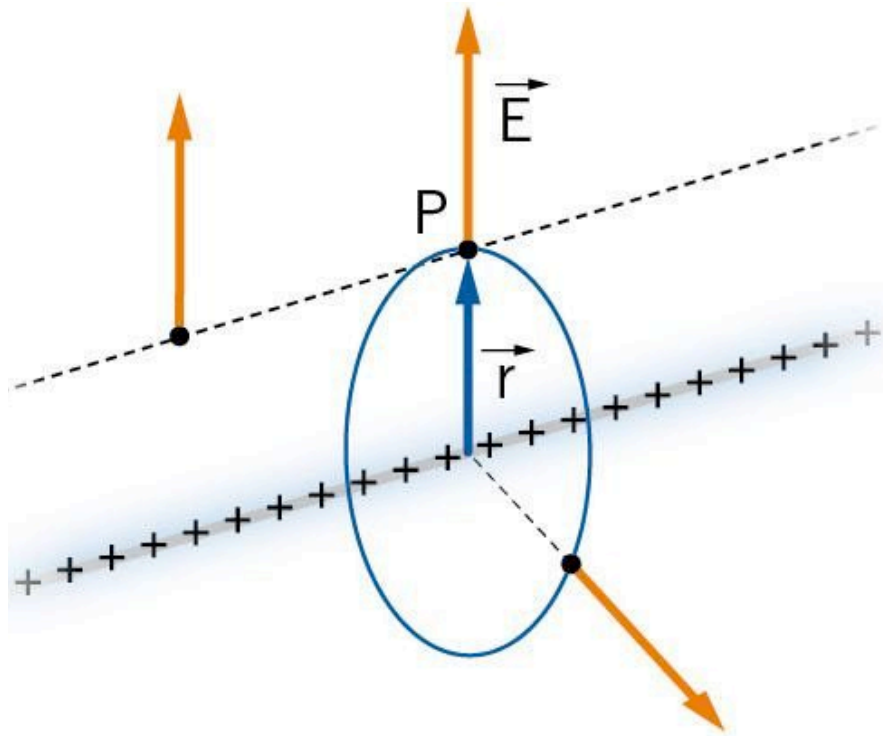
Campo elettrico generato da un filo carico

Consideriamo un filo *infinito* con una densità lineare di carica:

$$\lambda = \frac{Q}{\Delta l} = \left[\frac{C}{m} \right]$$



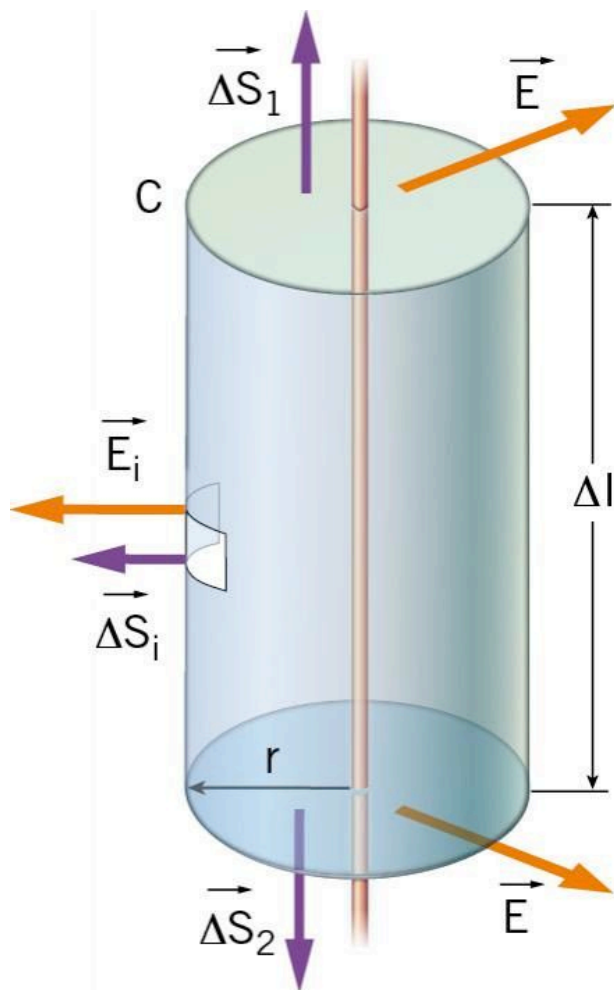
Utilizzando le simmetrie del sistema, e tenendo presente che la carica elettrica è disposta in maniera uniforme (ogni parte di lunghezza del filo contiene la stessa quantità di carica), si dimostrano le seguenti proprietà:



In un punto P a distanza r dal filo, il campo elettrico ha:

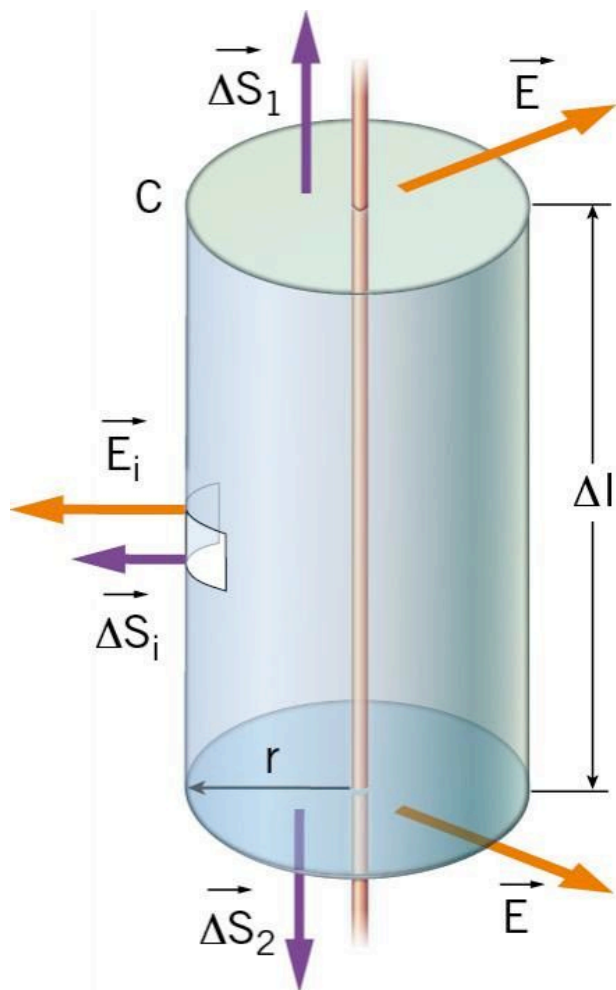
- direzione perpendicolare al “filo” di carica;
- verso uscente dalle cariche se sono positive, entrante se sono negative.

Calcoliamo l'intensità del campo elettrico utilizzando il teorema di Gauss e le proprietà di simmetria.



Per ragioni di simmetria, scegliamo come superficie gaussiana una superficie cilindrica di altezza Δl e raggio r con l'asse coincidente con il filo carico.

In ogni punto della superficie laterale del cilindro il campo elettrico $\mathbf{E}$ è ortogonale alla superficie stessa, ha lo stesso verso del vettore $\Delta \mathbf{S}$, e ha modulo costante E (tutti i punti della superficie sono equidistanti dal filo).



Ne segue che il flusso uscente dalla superficie laterale, se $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n$ sono i vari elementi di superficie in cui essa, è:

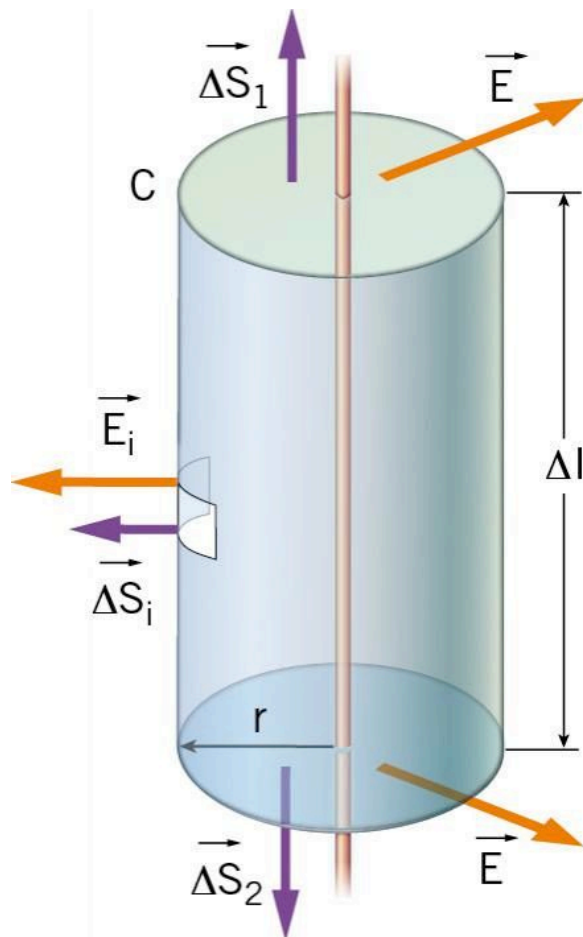
$$\Phi(\vec{E}) = E_1 \Delta S_1 + E_2 \Delta S_2 + \dots + E_n \Delta S_n = E(\Delta S_1 + \dots + \Delta S_n) = E \cdot 2\pi r \Delta l$$

dove :

$$E_1 = E_2 = \dots = E_n$$

$$\Delta S_1 = \Delta S_2 = \dots = \Delta S_n$$

$$\sum_{i=1}^n \Delta S_i = 2\pi r \Delta l$$



Il flusso attraverso le basi del cilindro invece è nullo, poiché il campo elettrico $\mathbf{E}$ e il vettore superficie $\Delta\mathbf{S}$ sono a 90° ($\cos 90^\circ = 0$).

Applichiamo dunque il teorema di Gauss, e ricordando la definizione di densità di carica lineare, si ottiene:

$$\Phi(\vec{E}) = E 2\pi r \Delta l = \frac{Q}{\epsilon} \Rightarrow E = \frac{Q}{2\pi\epsilon r \Delta l} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon r}$$

In conclusione:

Campo elettrico generato da un filo carico

Diagram illustrating the formula for the electric field E generated by a charged wire:

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

Labels and units:

- campo elettrico (N/C) points to E
- densità lineare di carica (C/m) points to λ
- costante dielettrica del vuoto ($\text{C}^2/(\text{N}\cdot\text{m}^2)$) points to ϵ_0
- r represents the distance from the wire.

Il campo elettrico è indipendente dall'altezza Δl del cilindro e dipende solo dalla distanza r dal filo.

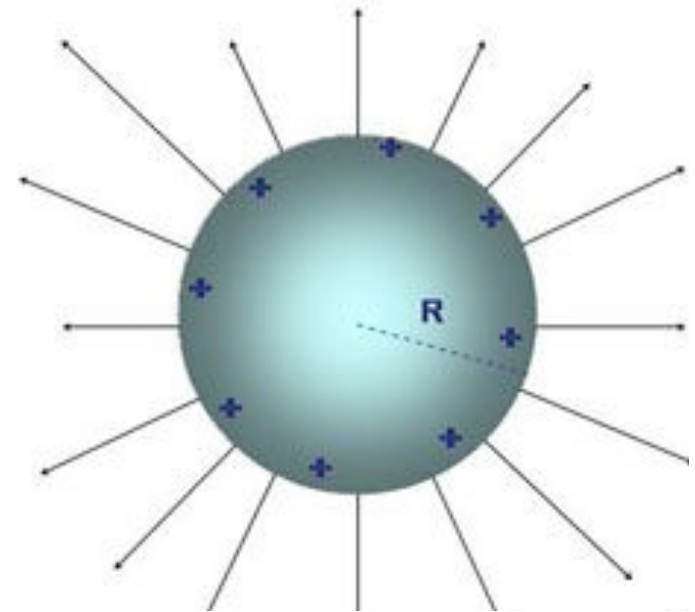
Se il filo non è infinitamente lungo non possiamo più invocare la simmetria della distribuzione di carica e la relazione ricavata non è più valida. In tal caso il campo è approssimativamente come quello descritto, ma solo nelle vicinanze del filo e lontano dalle due estremità.

Campo elettrico generato da una distribuzione sferica di cariche

Consideriamo una sfera di raggio R su cui la carica è distribuita uniformemente con densità di carica volumica:

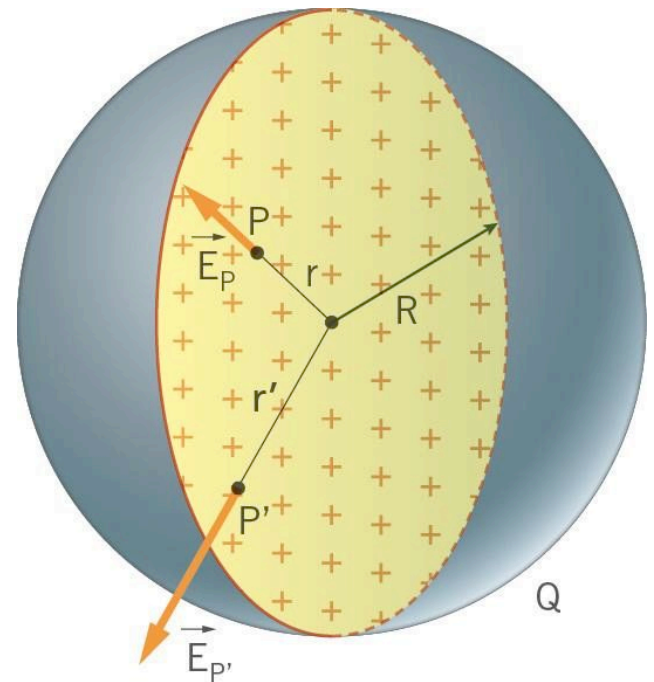
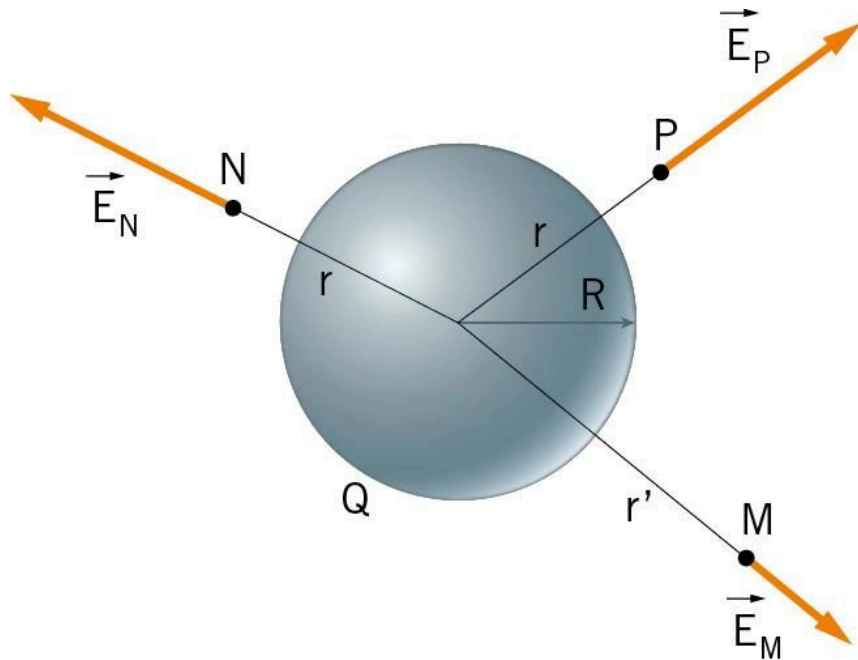
$$\rho = \frac{Q}{V} = \left[\frac{C}{m^3} \right]$$

Utilizzando le simmetrie del sistema, e tenendo presente che la carica elettrica è disposta in maniera uniforme, si dimostrano le seguenti proprietà:

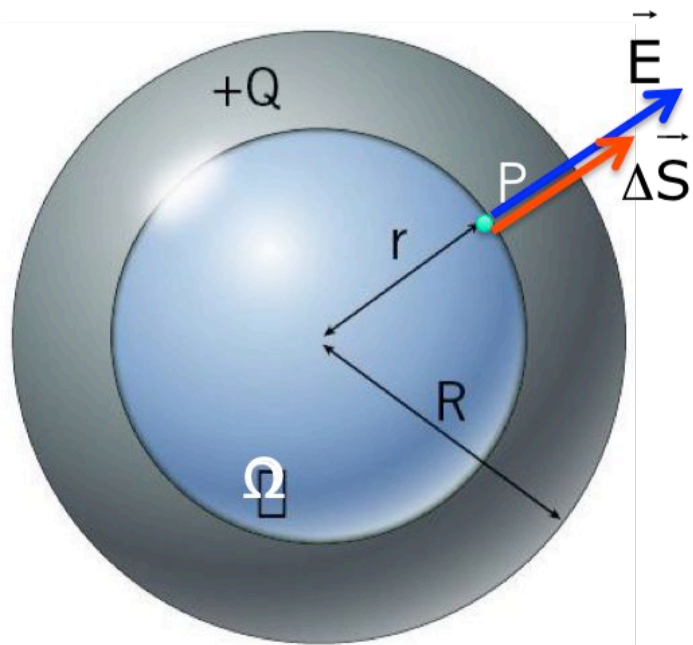


In un punto P a distanza r dal centro della sfera (sia con $r < R$ che con $r > R$), il campo elettrico ha:

- direzione radiale dal centro della sfera;
- verso uscente se la carica è positiva, entrante se la carica è negativa.

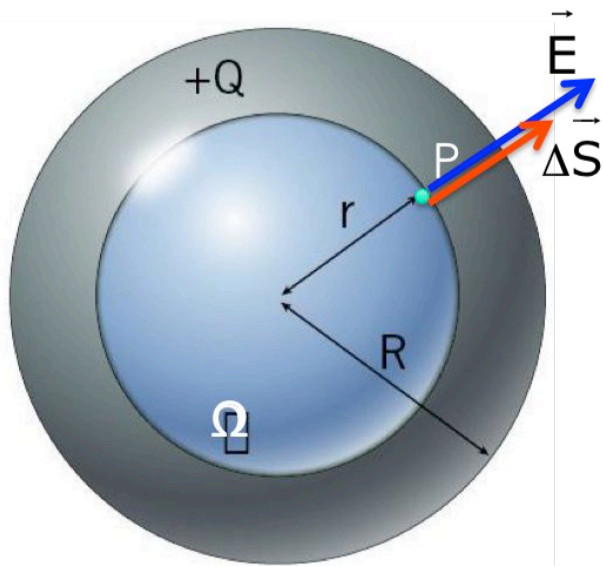


Calcoliamo l'intensità del campo elettrico utilizzando il teorema di Gauss e le proprietà di simmetria, nei due casi proposti.



Applichiamo il teorema di Gauss alla superficie sferica Ω passante per P e concentrica con la distribuzione di carica assegnata.

In ogni punto della superficie Ω il campo elettrico $\mathbf{E}$ ha lo stesso verso del vettore $\Delta \mathbf{S}$, e ha modulo costante E (tutti i punti della superficie sono equidistanti dal centro).



Il flusso del campo elettrico uscente dalla superficie Ω è:

$$\Phi_{\Omega}(\vec{E}) = ES = E \cdot 4\pi r^2$$

dove : $S = \sum_{i=1}^n \Delta S_i = 4\pi r^2$

Se q è la carica elettrica contenuta entro la superficie Ω :

$$\rho = \frac{q}{V} \Rightarrow q = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 \quad \text{dove : } \rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

per il teorema di Gauss possiamo scrivere:

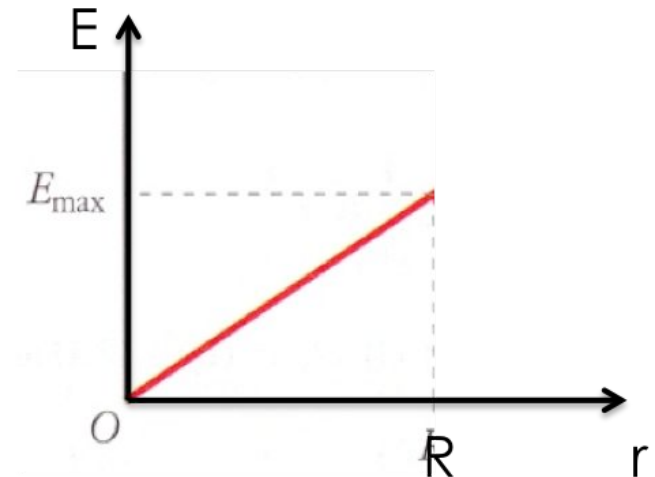
$$\Phi_{\Omega}(\vec{E}) = E \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon} \Rightarrow E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon R^3} r$$

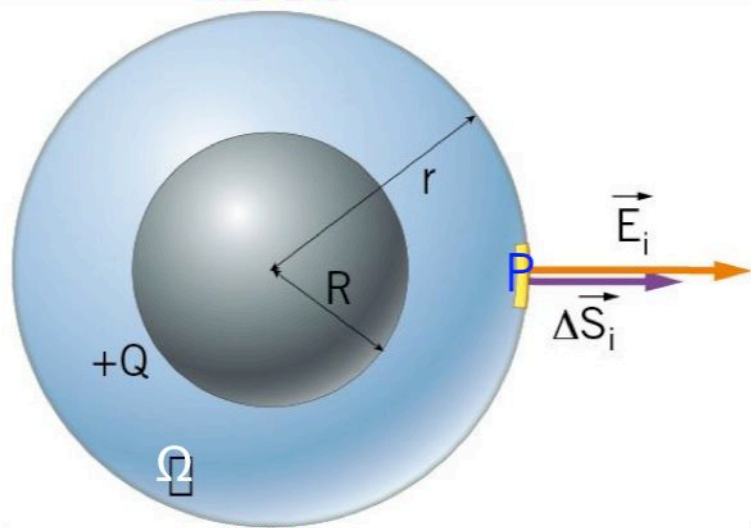
Campo elettrico all'interno di una sfera omogenea di carica

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon R^3} r \quad (r \leq R)$$

L'intensità del campo elettrico all'interno della sfera è direttamente proporzionalmente alla distanza r dal centro, raggiungendo il valore massimo $E_{\max}$ per $r=R$:

$$E_{\max} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^2}$$





In modo analogo possiamo calcolare il modulo del campo elettrico all'esterno della sfera contenente la carica, cioè in un punto P la cui distanza $r > R$.

Per il teorema di Gauss applicato alla superficie sferica Ω passante per P e concentrica con la distribuzione di carica, abbiamo:

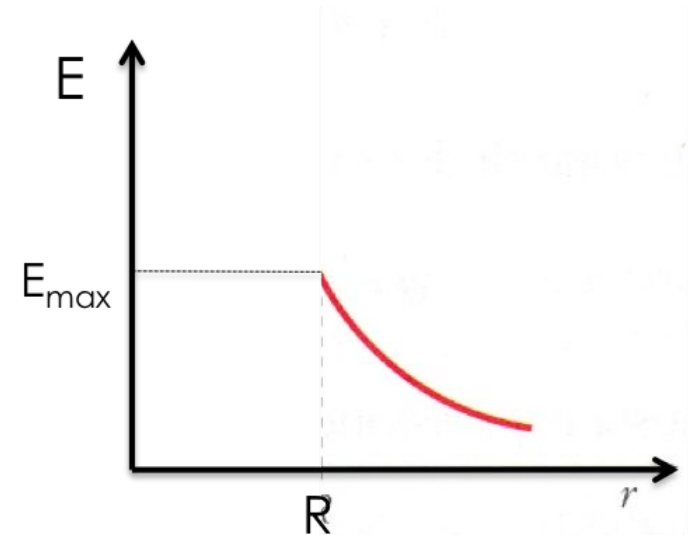
$$\Phi_{\Omega}(\vec{E}) = E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon} \Rightarrow E = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{Q}{r^2}$$

in quanto ora la carica interna alla superficie considerata è tutta la carica Q contenuta entro la sfera.

Campo elettrico all'esterno di una sfera omogenea di carica

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q}{r^2} \quad (r \geq R)$$

Nello spazio esterno a una distribuzione di carica con simmetria sferica, il campo elettrico è inversamente proporzionale al quadrato della distanza dal centro della sfera ed è uguale, quindi, a quello che ci sarebbe se tutta la carica fosse concentrata nel centro della sfera.



Conclusione

Campo elettrico di una sfera uniformemente carica

Il campo elettrico di una carica Q distribuita uniformemente nel volume di una sfera di raggio R aumenta proporzionalmente alla distanza r dal centro per $r < R$, mentre diminuisce come $1/r^2$ per $r > R$. E' massimo per $r = R$.

